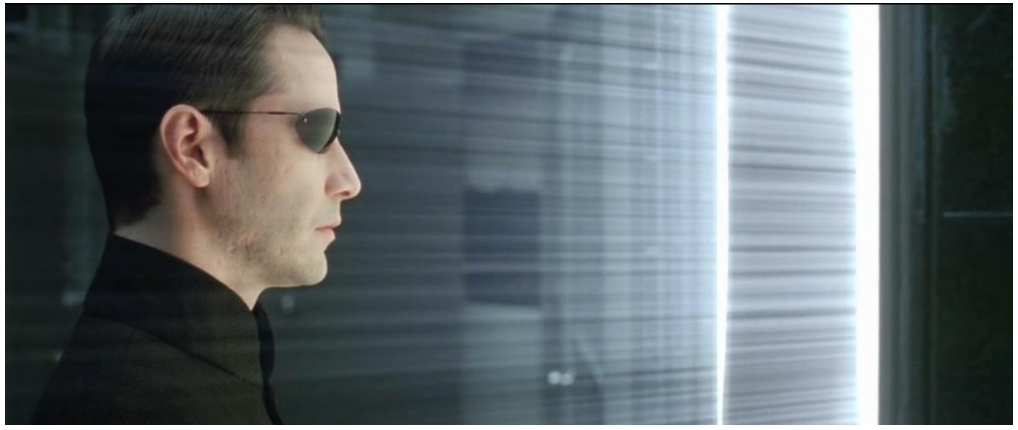
Матричный профиль временного ряда



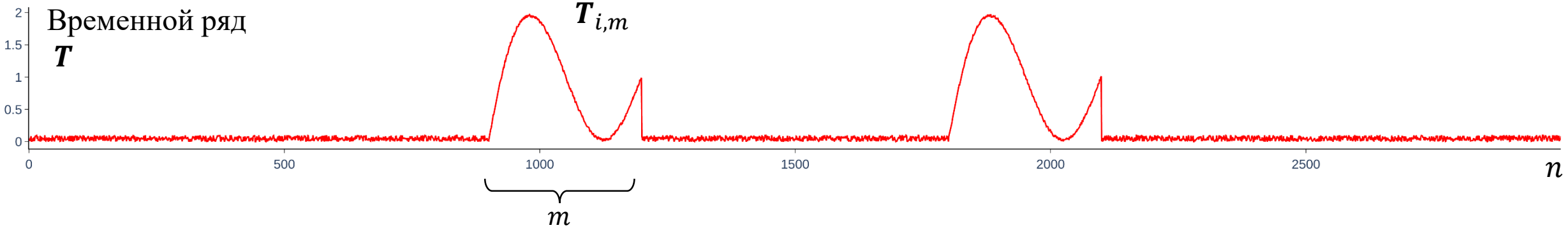
What is the Matrix? Control.

Morpheus

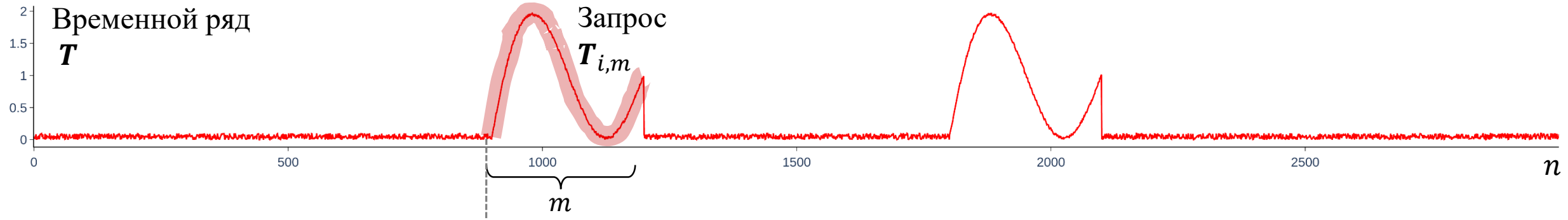
Содержание

- Понятие матричного профиля
- Примеры задач, решаемых на основе матричного профиля
- Алгоритмы вычисления матричного профиля

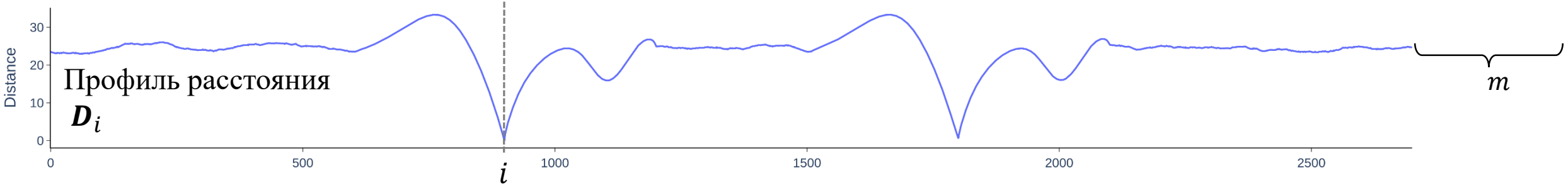
Матричный профиль: Временной ряд



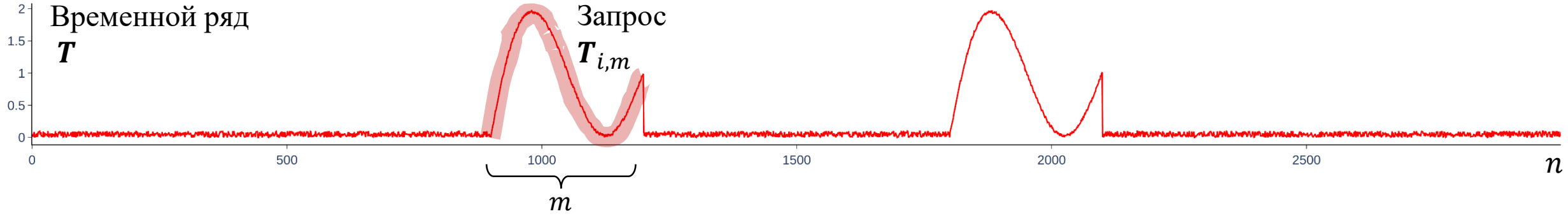
Матричный профиль: Профиль расстояния



$$\boldsymbol{D}_i = \left\{\mathrm{Dist}\left(Q, T_{j,m}\right)\right\}_{j=1}^{n-m+1}, \quad Q = \boldsymbol{T}_{i,m}, \quad 1 \le i \le n - m + 1$$

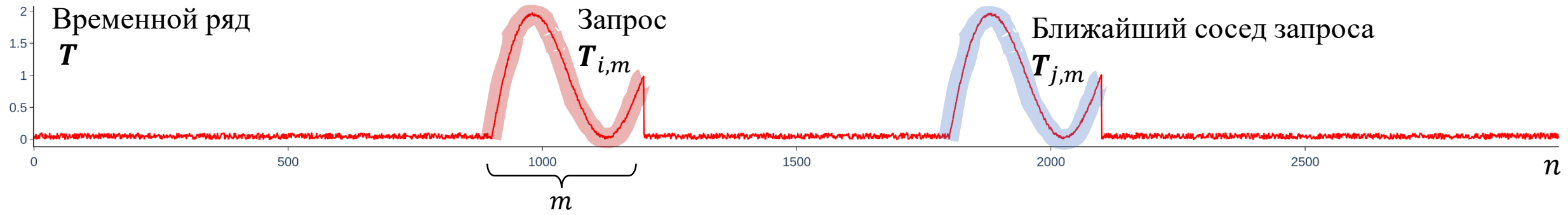


Матричный профиль: Матрица профилей расстояния



	$T_{1,m}$	$T_{2,m}$	…	$T_{i,m}$	…	$T_{n-m+1,m}$
D_1	0	$\text{Dist}(T_{1,m}, T_{2,m})$				
D_2	$\text{Dist}(T_{2,m}, T_{1,m})$	0				
…	…		0	…		
D_i	$\text{Dist}(T_{i,m}, T_{1,m})$	$\text{Dist}(T_{i,m}, T_{2,m})$	…	0		
…	…				0	…
D_{n-m+1}	$\text{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{1,m})$	$\text{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{2,m})$	…	$\text{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{i,m})$	…	0

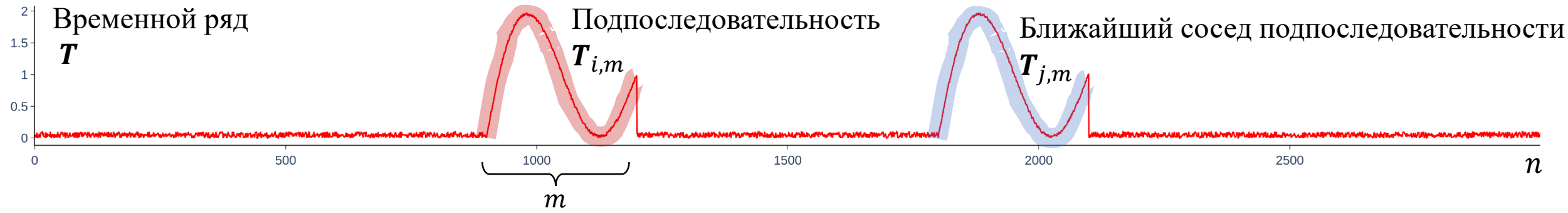
Матричный профиль: Поиск ближайших соседей



		$T_{1,m}$	$T_{2,m}$	…	$T_{i,m}$	…	$T_{n-m+1,m}$
$\min_{1\le i<n-m+1,\ \lvert i-1\rvert>m} \mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{1,m})$	D_1	0	$\mathrm{Dist}(T_{1,m}, T_{2,m})$				
	D_2	$\mathrm{Dist}(T_{2,m}, T_{1,m})$	0				
	…	…		0	…		
$\min_{1\le i<n-m+1,\ \lvert i-j\rvert>m} \mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{j,m})$	D_i	$\mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{1,m})$	$\mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{2,m})$	…	0		
	…	…				0	…
	D_{n-m+1}	$\mathrm{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{1,m})$	$\mathrm{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{2,m})$	…	$\mathrm{Dist}(T_{n-m+1,m}, T_{i,m})$	…	0

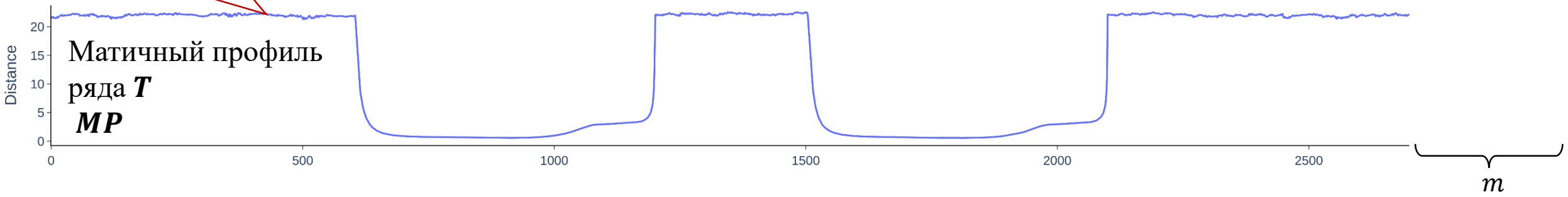
Соседи не пересекаются:
$|i - j| > m$

Матричный профиль

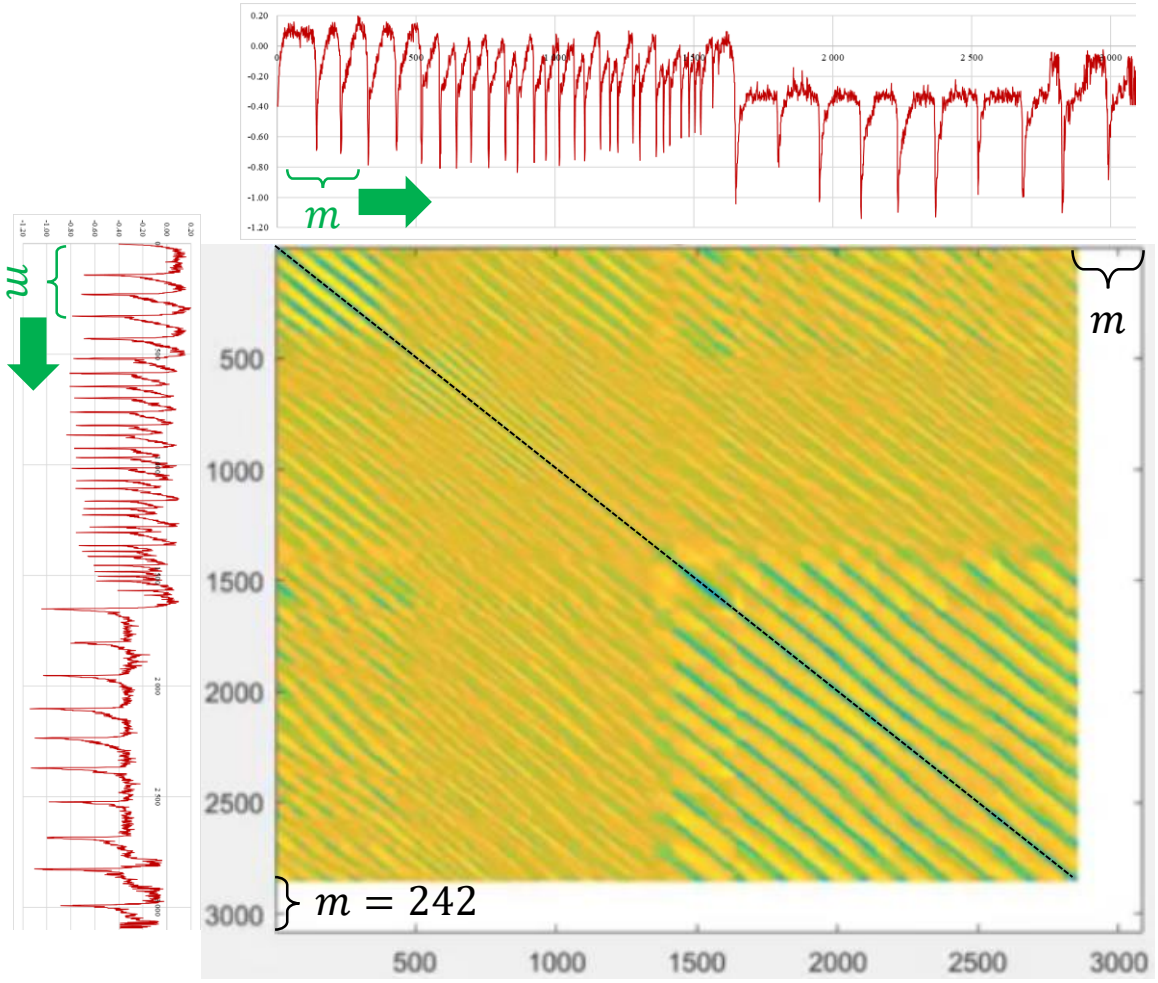


Расстояния до ближайшего соседа подпоследовательностей ряда

$$MP_T^m(i) = \min_{\substack{T_{j,m} \in S_T^m \\ |i-j|>m}} D_i$$



Почему профиль *матричный*?

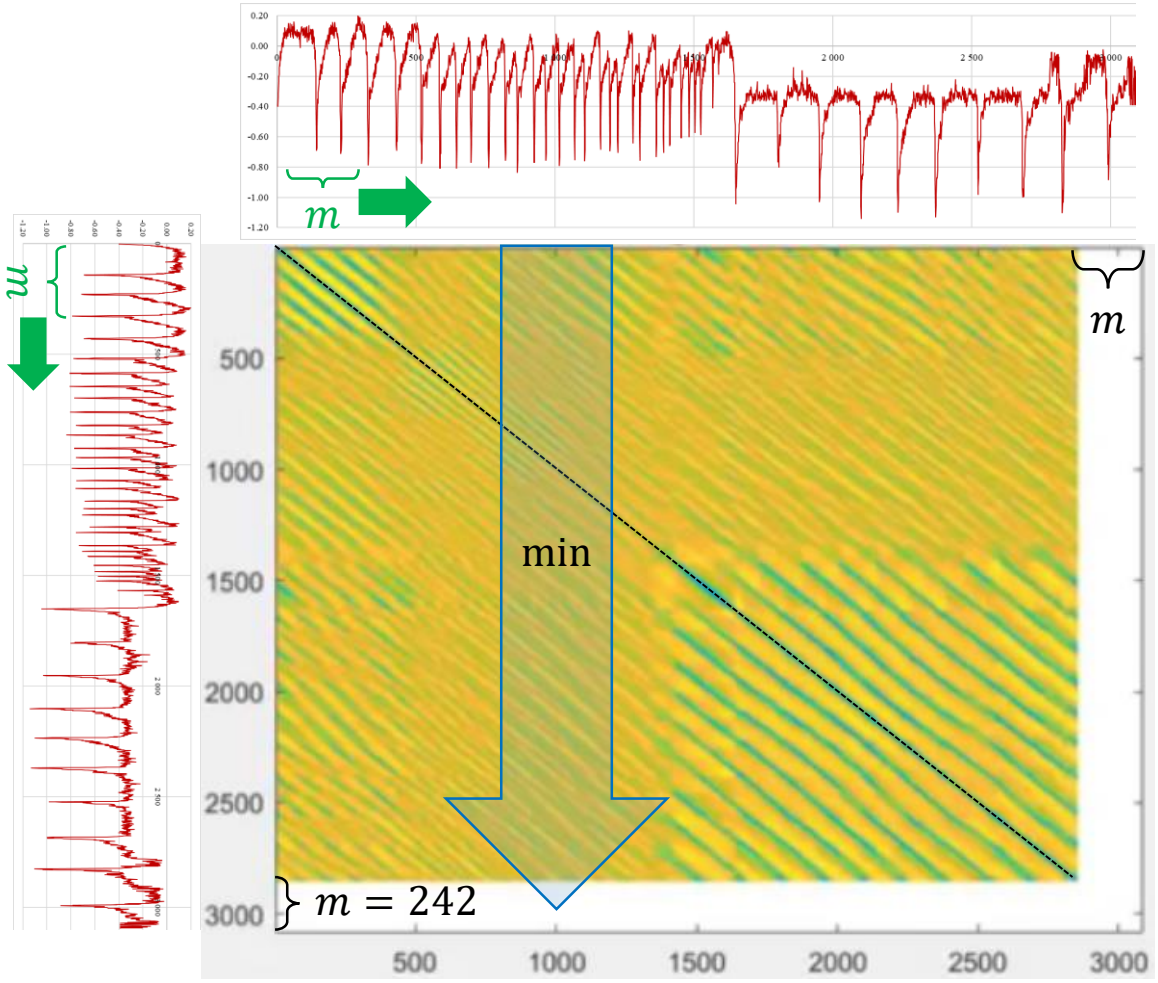


Матрица расстояний

$$DistMatr_T^m \in \mathbb{R}^{(n-m+1)\times(n-m+1)}$$

$$DistMatr_T^m(i,j) = \mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{j,m})$$

Почему профиль *матричный*?



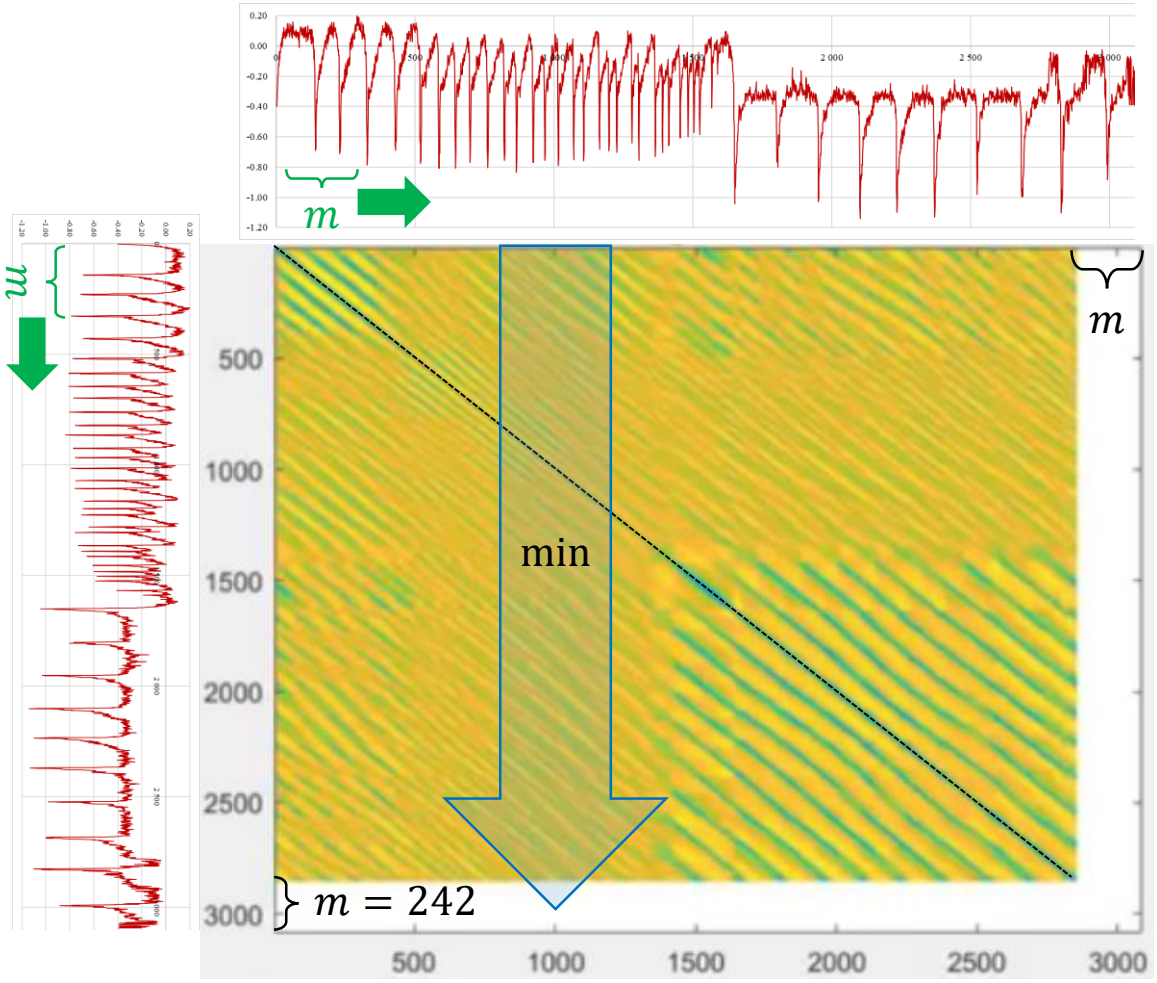
Матрица расстояний

$$DistMatr_T^m \in \mathbb{R}^{(n-m+1)\times(n-m+1)}$$

$$DistMatr_T^m(i,j) = \mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{j,m})$$

$$MP_T^m(i) = \min_{\substack{1\le j\le n-m+1 \\ |i-j|>m}} DistMatr(j,i)$$

Почему профиль *матричный*?



Матрица расстояний

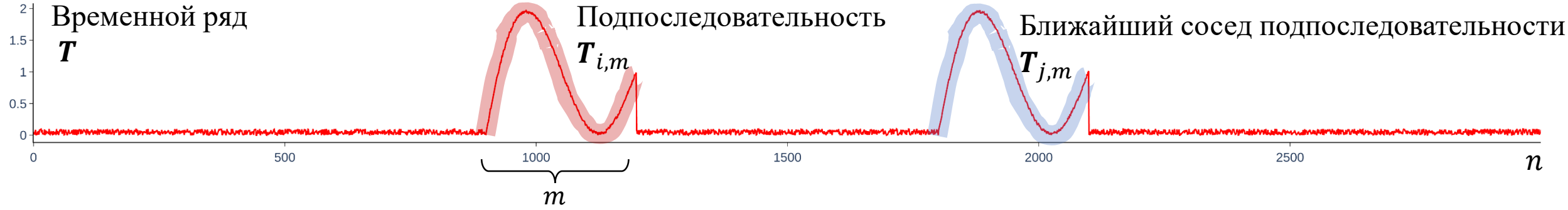
$$DistMatr_T^m \in \mathbb{R}^{(n-m+1)\times(n-m+1)}$$

$$DistMatr_T^m(i,j) = \mathrm{Dist}(T_{i,m}, T_{j,m})$$

$$MP_T^m(i) = \min_{\substack{1\le j\le n-m+1 \\ |i-j|>m}} DistMatr(j,i)$$

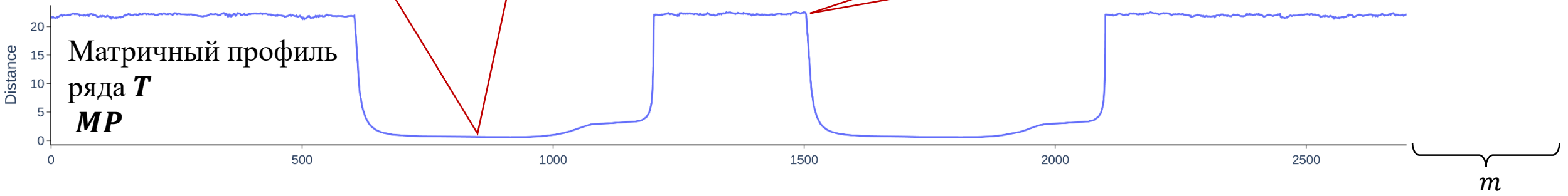
Получение МП через матрицу расстояний ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО НЕ ЭФФЕКТИВНО и ЗАТРАТНО ПО ПАМЯТИ (4 Тб для $n = 10^6$)

Простое понимание матричного профиля

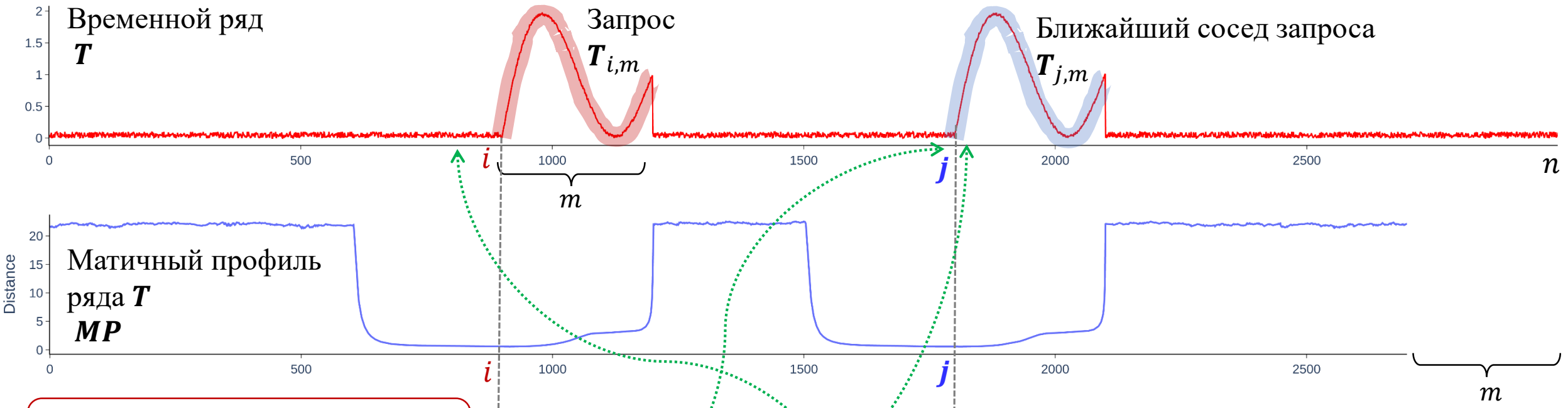


Локальные минимумы МП соответствуют мотивам (шаблонам) ряда

Локальные максимумы МП соответствуют диссонансам (аномалиям) ряда



Индекс матричного профиля



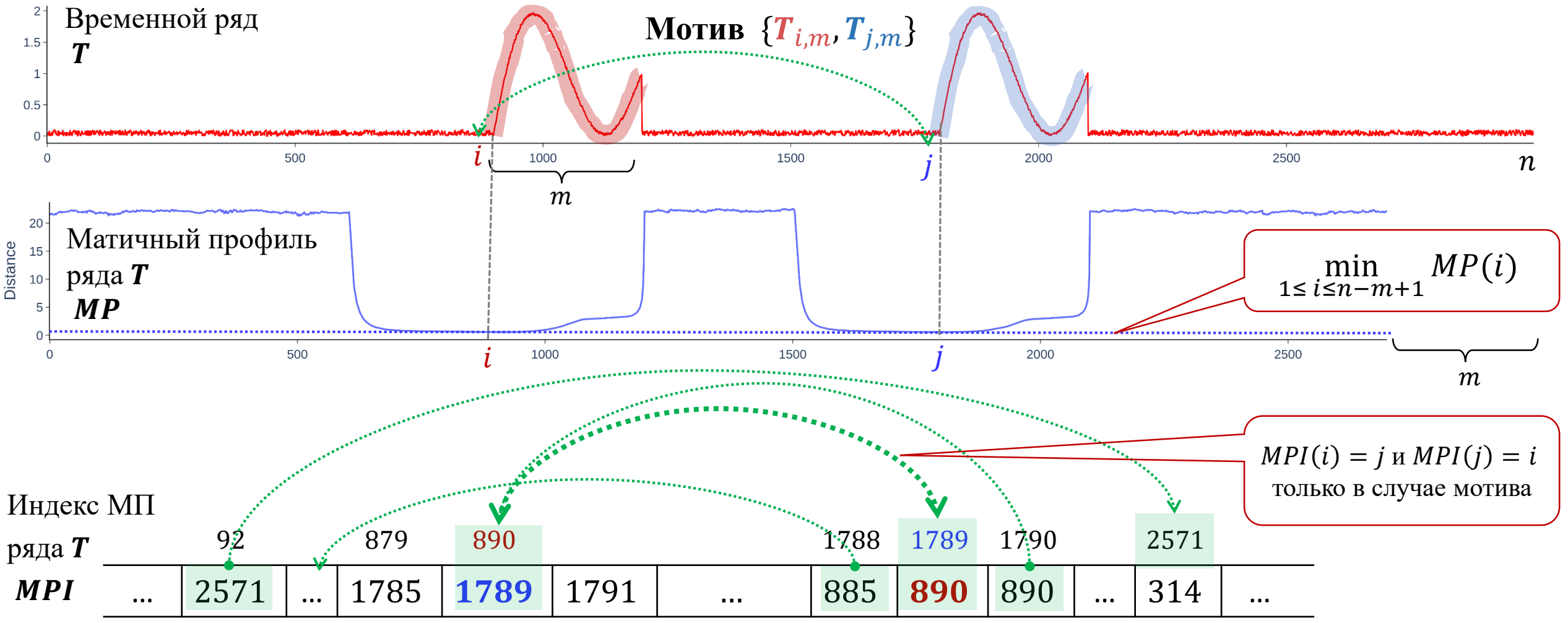
Индекс ближайшего соседа подпоследовательностей ряда

$$MPI_T^m(i) = \arg \min_{\substack{T_{j,m} \in S_T^m \\ |i-j|>m}} D_i$$

Индекс матричного профиля ряда T MPI

...	1785	1789	1793	...	885	890	890	...

Индекс МП *не* симметричен в общем случае



Функция $\mathbf{Dist}(\cdot,\cdot)$ для матричного профиля

- ED
- ED^2
- $\mathbf{ED_{norm}}$
- $\mathbf{ED^2_{norm}}$
- DTW
- Hamming
- …

Можно использовать любую функцию расстояния (метрику или не-метрику), это вопрос двух факторов:

- релевантность функции предметной области
- сложность (быстрота) вычисления МП

Обобщение: Матричный профиль соединения (Join MP)

- Ряды A, B

  $|A| = n_A \neq |B| = n_B$

- Профиль расстояния

  $D_i = \{\text{Dist}(A_{i,m}, B_{j,m})\}_{j=1}^{n_B-m+1}$,

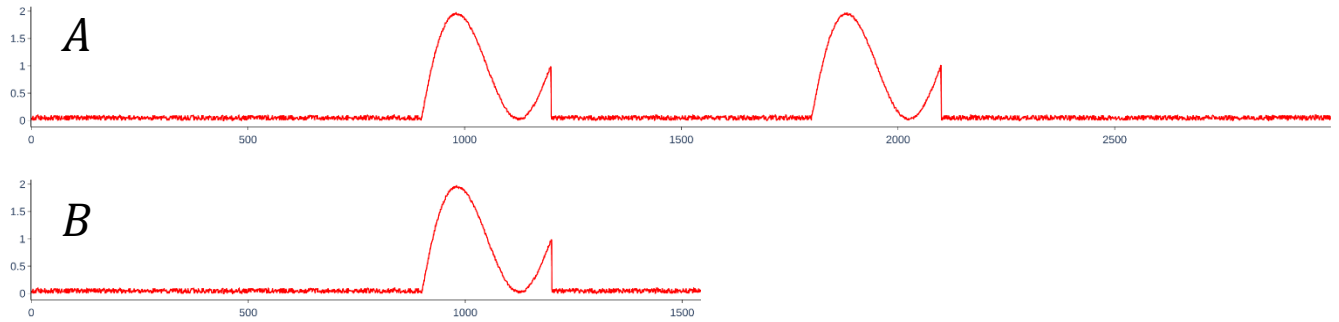
  $1 \leq i \leq n_A - m + 1$

- МП соединения

  $MPjoin_{AB}^{m}(i) = \min_{1 \leq j \leq n_B-m+1} D_i(j)$

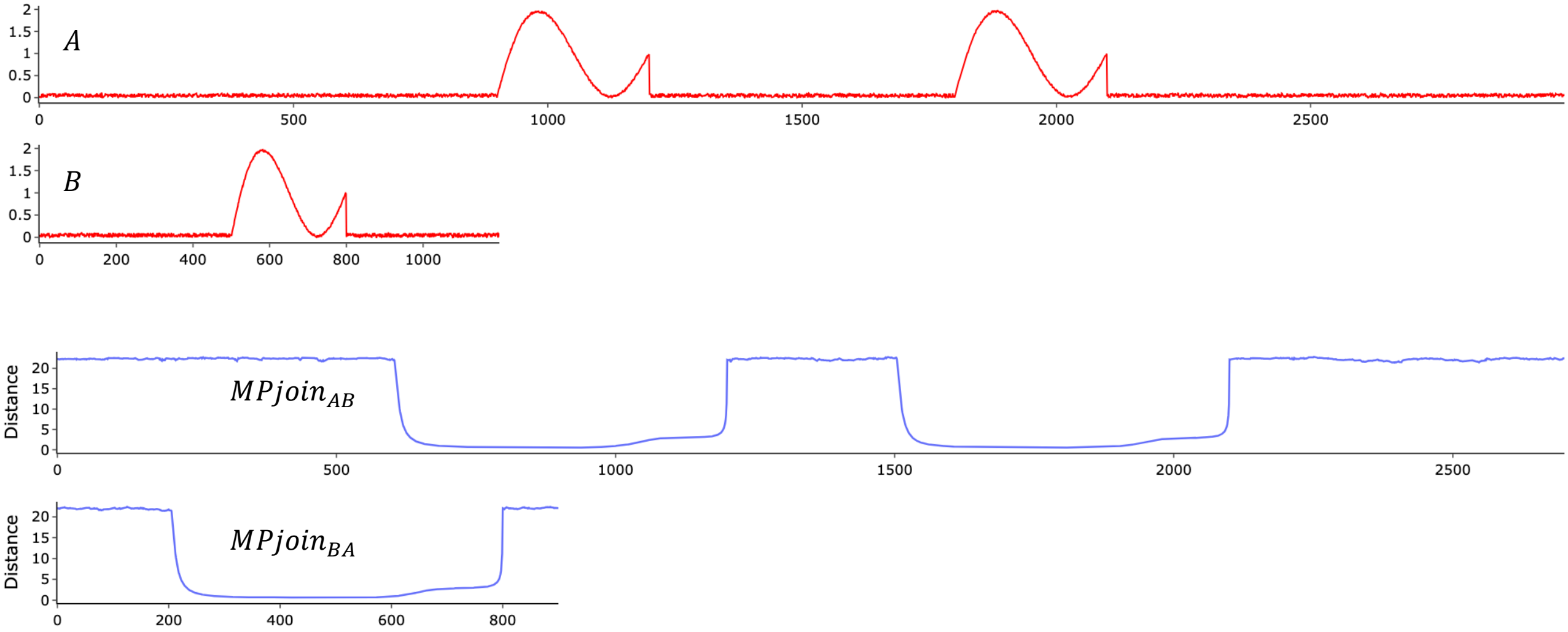
- Индекс МП соединения

  $MPIjoin_{AB}^{m}(i) = \arg\min_{1 \leq j \leq n_B-m+1} D_i(j)$

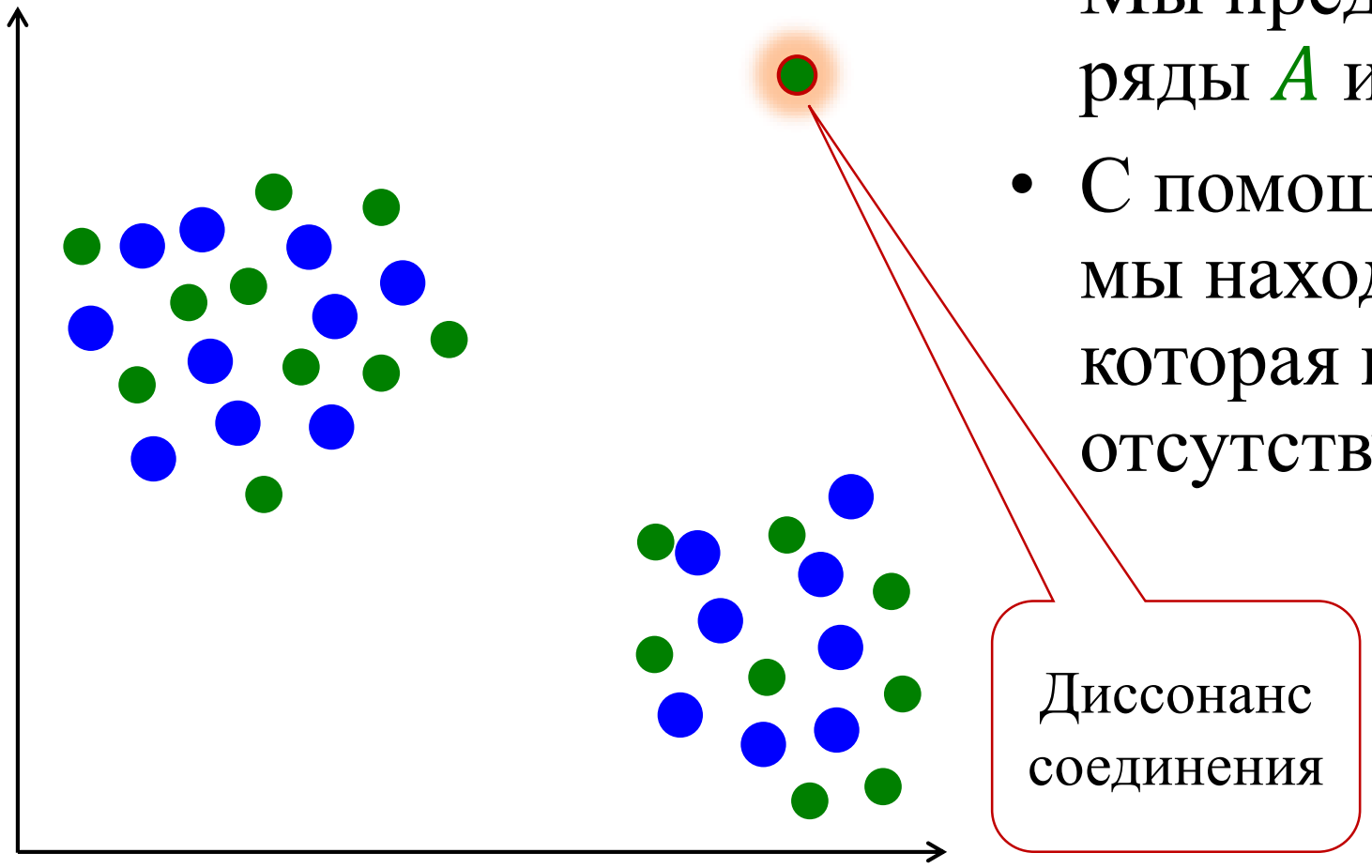


Нет условия недопустимости тривиального совпадения

МП соединения – *не* коммутативная операция: $MPjoin_{AB}^{m} \neq MPjoin_{BA}^{m}$

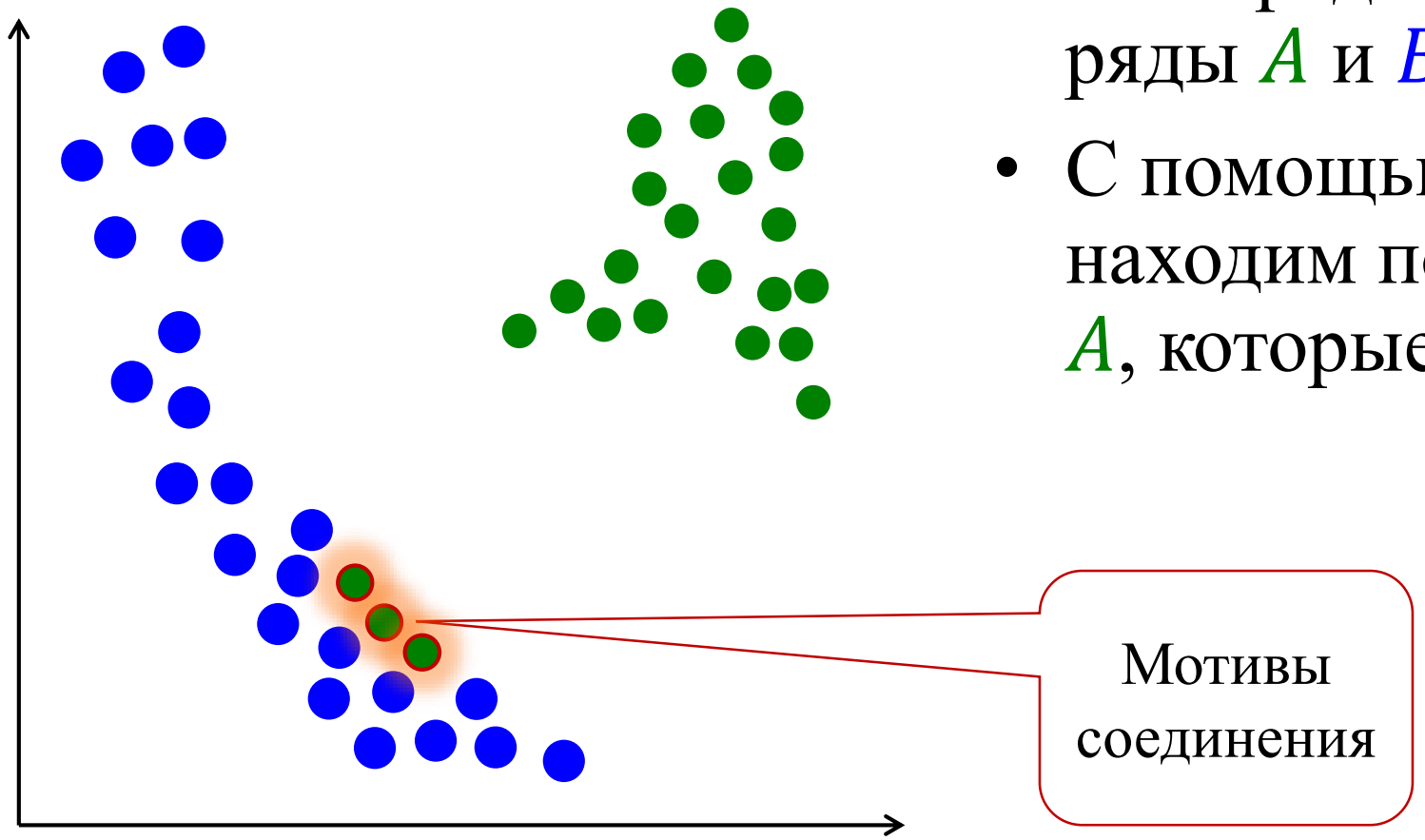


Простое понимание МП соединения: диссонансы



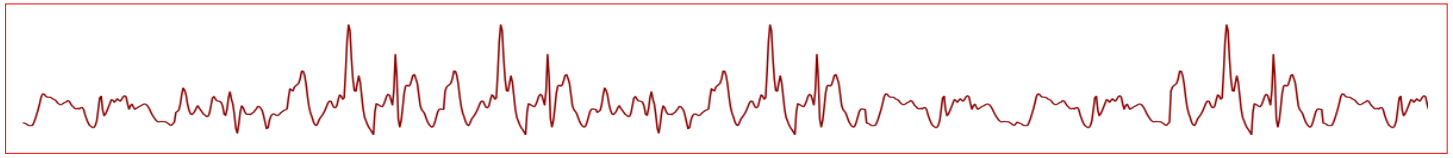
- Мы предполагаем, что временные ряды A и B существенно похожи
- С помощью МП соединения A и B мы находим подпоследовательность, которая встречается только в A, но отсутствует в B

Простое понимание МП соединения: мотивы



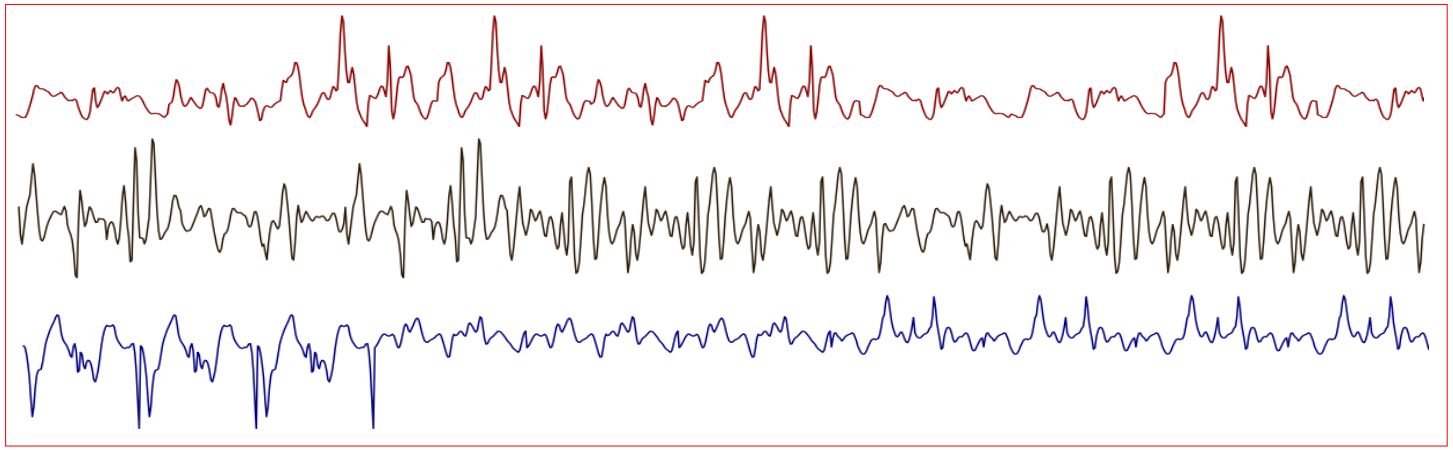
- Мы предполагаем, что временные ряды A и B существенно отличаются
- С помощью МП соединения A и B мы находим подпоследовательности из A, которые встречаются в B

Матричный профиль многомерного ряда



Dist(,)

$\mathrm{ED}, \mathrm{ED}^2,$
$\mathrm{ED}_{\mathrm{norm}}, \mathrm{ED}^2_{\mathrm{norm}},$
DTW, …



Dist(,)

Агрегация

Dist(,)

Dist(,)

Dist(,)

$\mathrm{median}(\{\mathrm{ED}^2_{\mathrm{norm}}(\cdot,\cdot)\}_{i=1}^{d})$

Содержание

- Понятие матричного профиля
- **Примеры задач, решаемых на основе матричного профиля**
- Алгоритмы вычисления матричного профиля

Матричный профиль – базис для решения большинства задач интеллектуального анализа временных рядов*

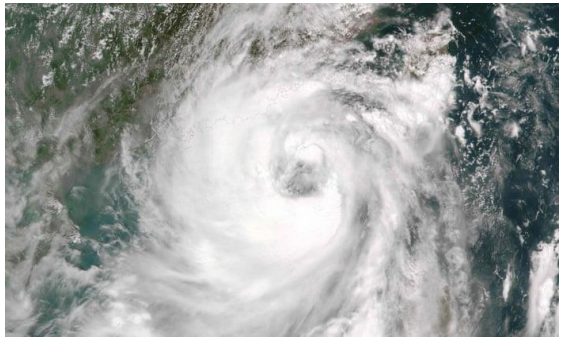
- Диссонансы
- Мотивы
- Шейплеты
- Сниппеты
- Цепочки
- Сравнение рядов
- …

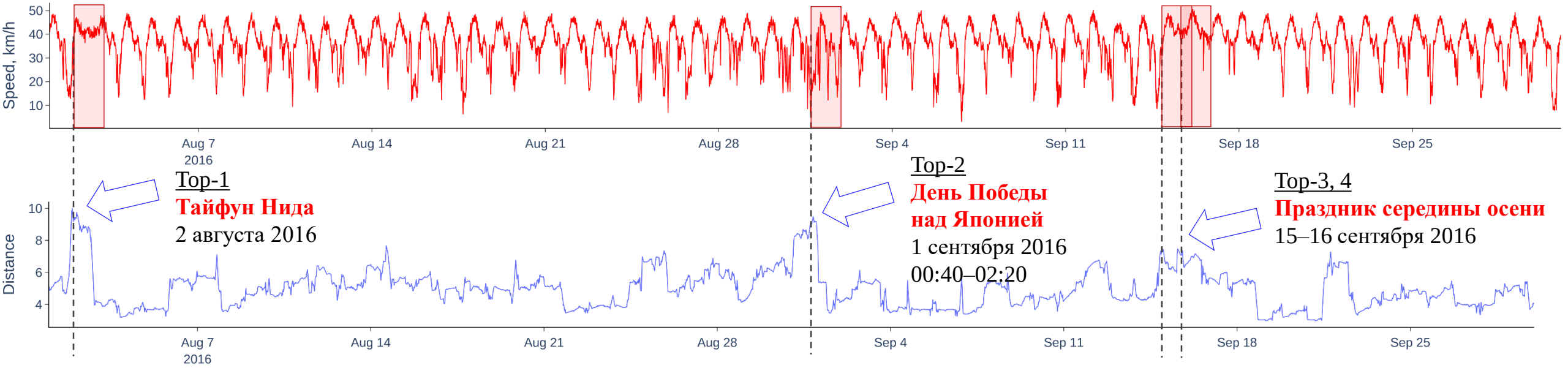
Имонн Кеог
(Калифорнийский университет в Риверсайде, США)
Eamonn Keogh
(University of California, Riverside, USA)

* Zhu Y. et al. The Swiss army knife of time series data mining: Ten useful things you can do with the matrix profile and ten lines of code. Data Min. Knowl. Discov. 34(4): 949-979 (2020). DOI: 10.1007/s10618-019-00668-6.

Поиск аномалий

Скорость городского трафика Гуанчжоу*

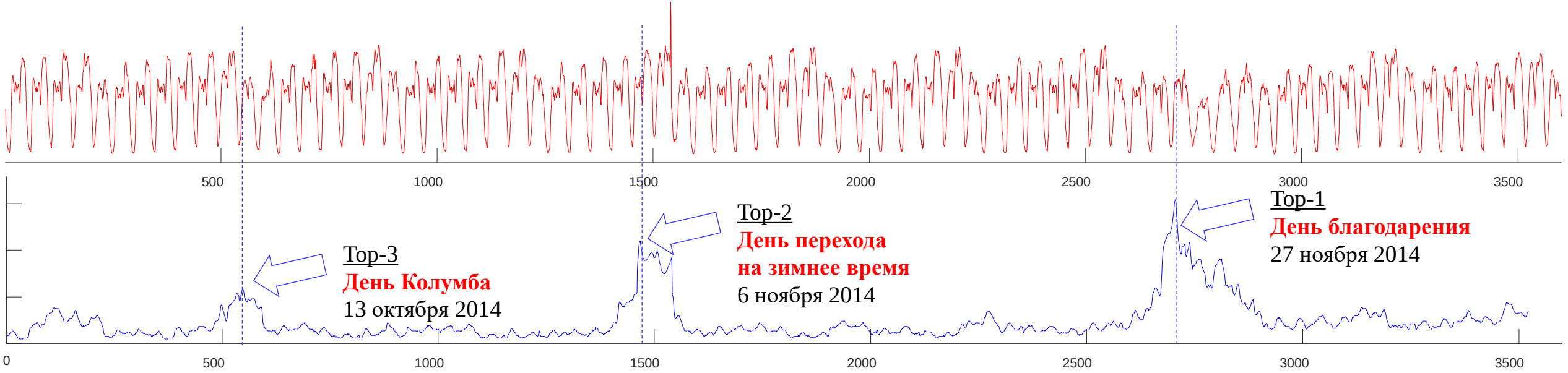




* Chen X., Chen Y., He Z. Urban traffic speed dataset of Guangzhou, China. 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1205229.

Поиск аномалий

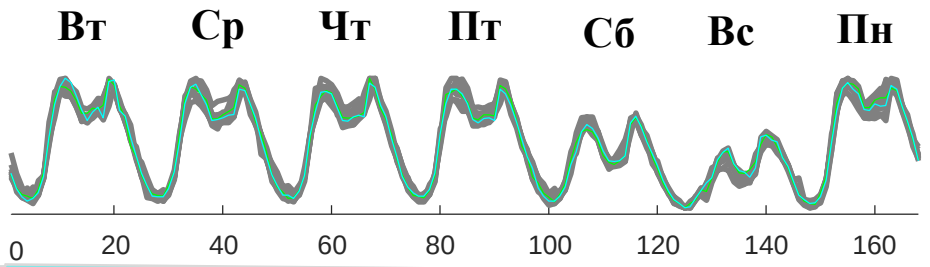
Среднее число пассажиров нью-йоркского такси (осень 2014 г., каждые полчаса)*

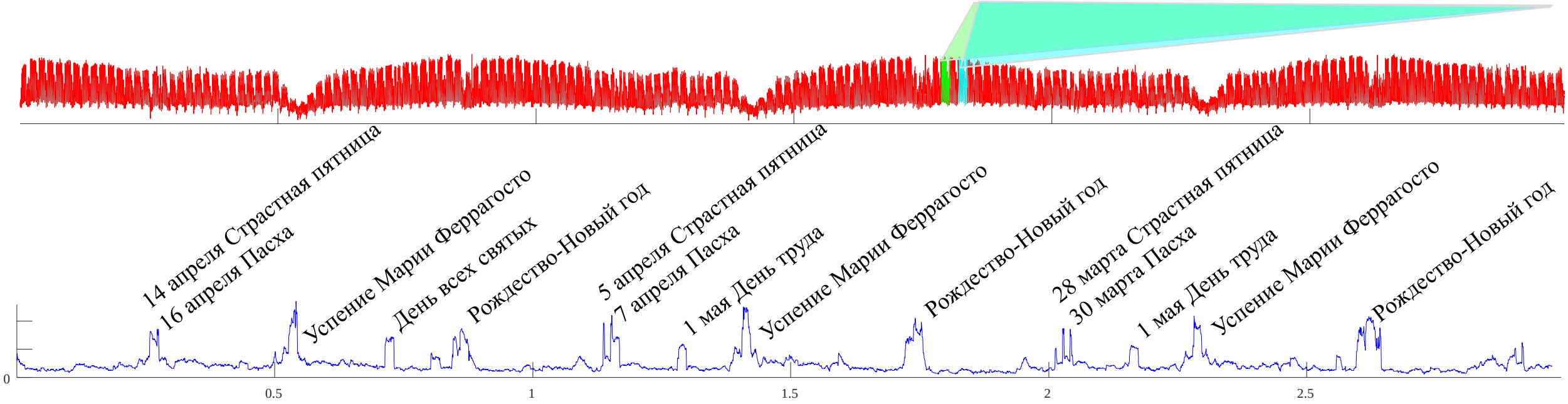


* 2014 New York City Taxi Trips. URL: https://www.kaggle.com/datasets/kentonnlp/2014-new-york-city-taxi-trips.

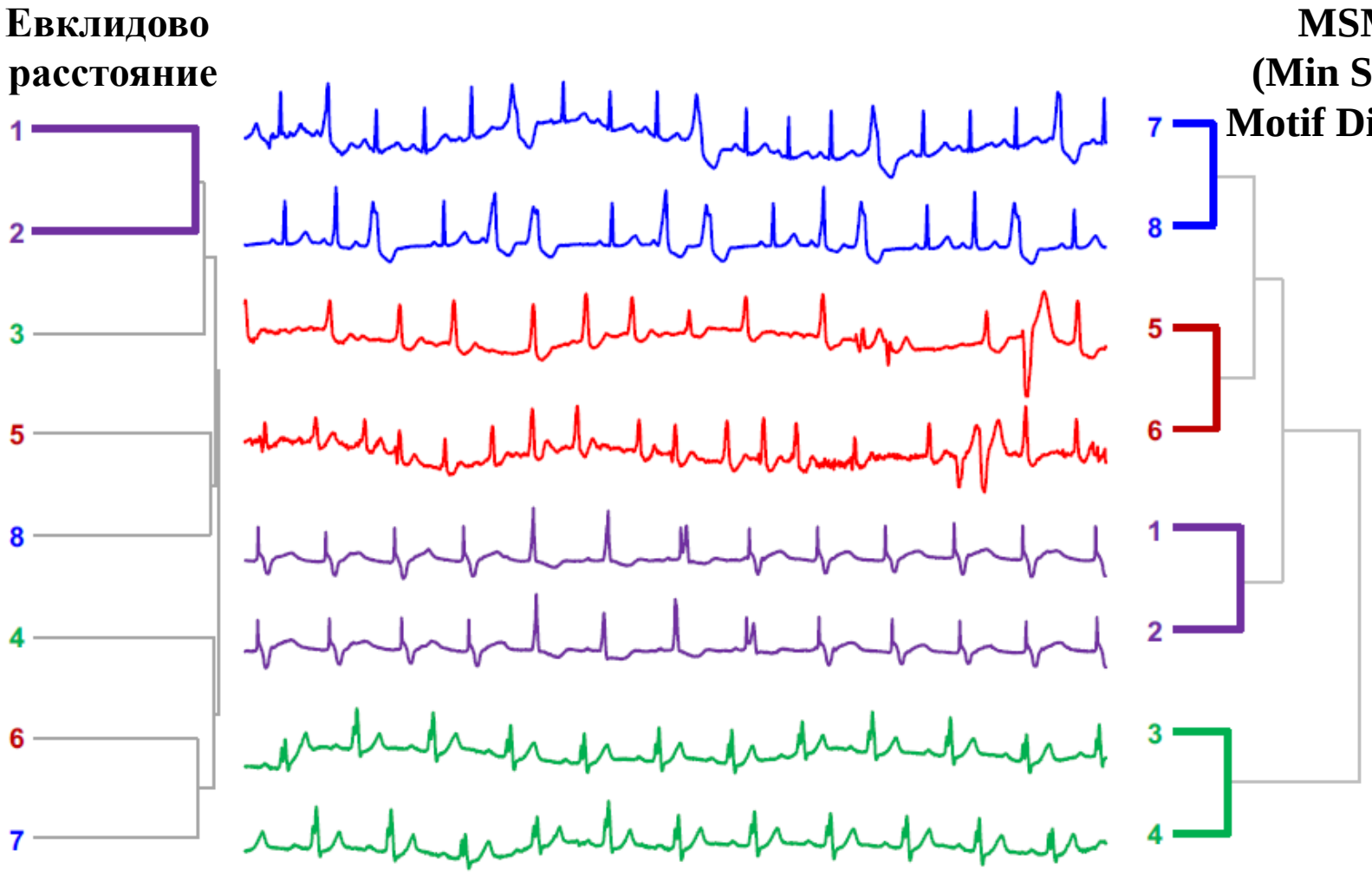
Поиск мотивов

Энергопотребление в Италии 1995-1998 гг.





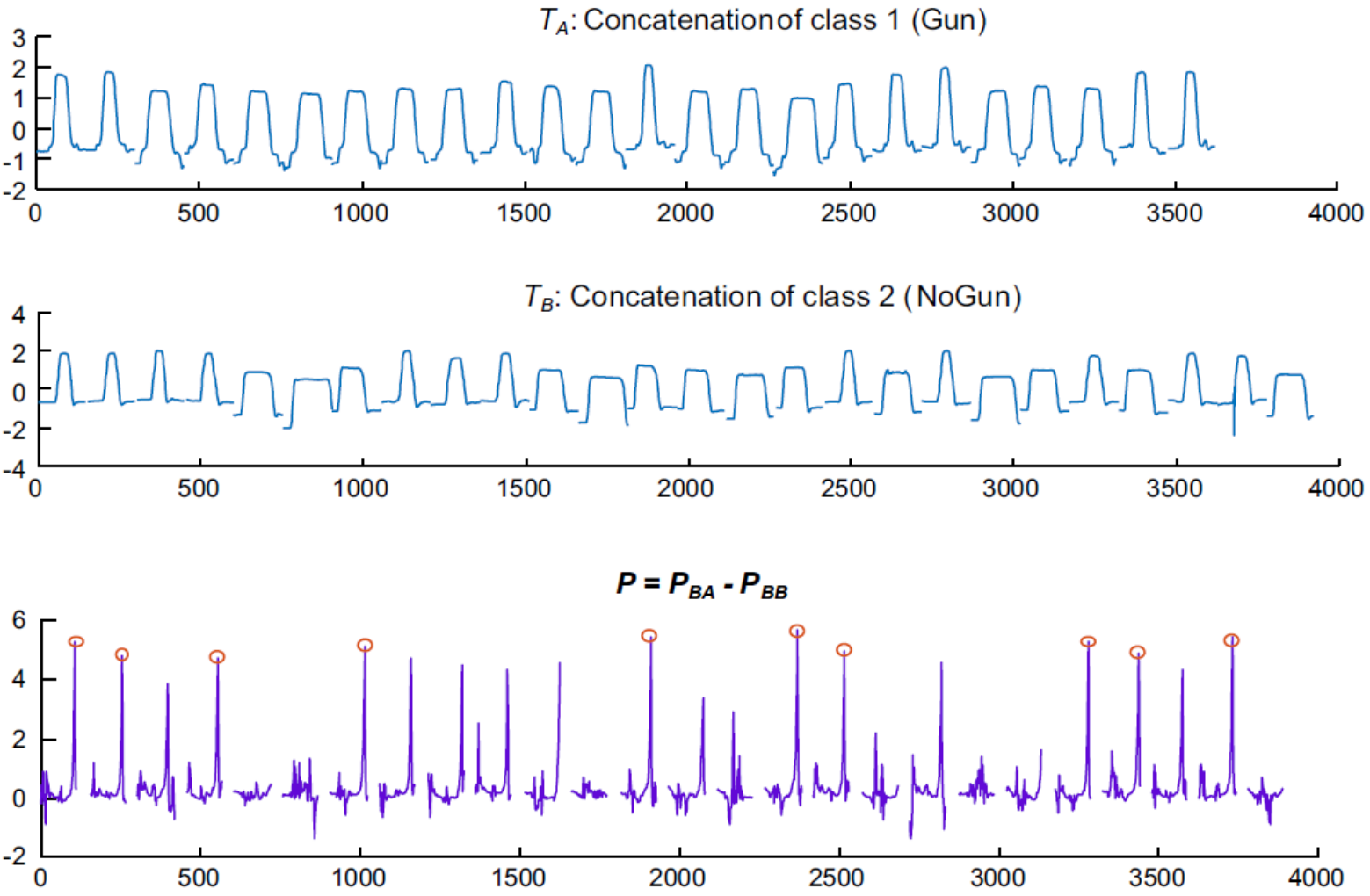
Сравнение временных рядов



- Сравнение 10 с фрагментов ЭКГ четырех пациентов
- Кластеризация на основе евклидова расстояния дает не адекватные итоги, в отличие от применения матричного профиля

$$\{P, I\} := MPjoin(A, B, m)$$
$$MSMD := \min(P)$$

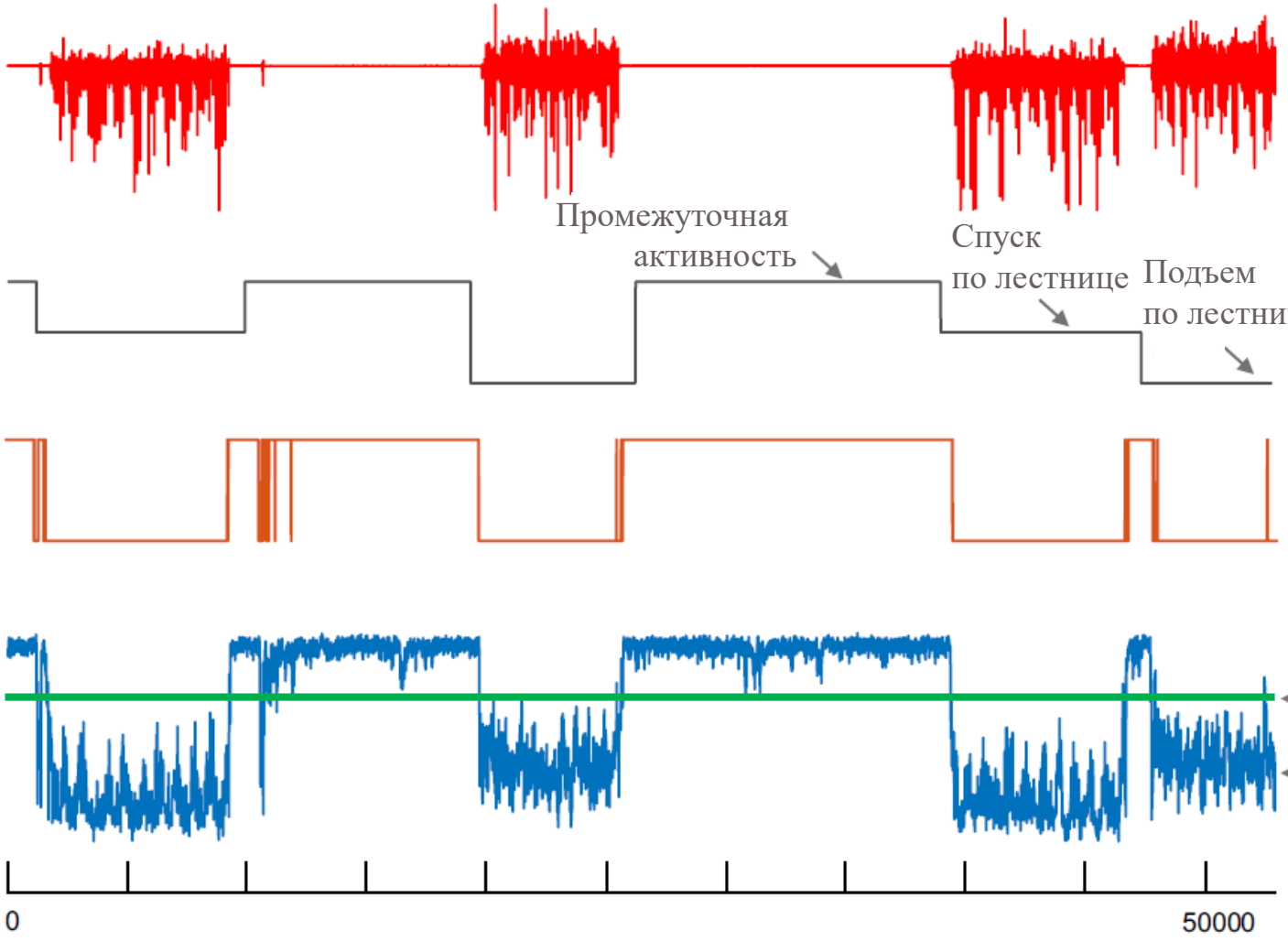
Поиск шейплетов (shapelet)



- *Шейплет* – лучший (наиболее репрезентативный) представитель класса подпоследовательностей (рядов)
- A и B – классы подпоследовательностей, T_A и T_B – ряды, полученные склейкой подпоследовательностей из своих классов (NaN разделяет каждую пару)
- Шейплеты – подпоследовательности, дающие топ-k максимумы в матричном профиле разницы $P = P_{BA} - P_{BB}$

$$\{PBB, Ibb\} := MPjoin(B, B, m)$$
$$\{PBA, Iba\} := MPjoin(B, A, m)$$
$$P := PBA - PBB$$
$$TopKshapelets := TopMax(P, k)$$

Сегментация повторяющихся активностей



Данные носимого акселерометра*

Истинная разметка

Сегментация на основе матричного профиля

Порог

Матричный профиль

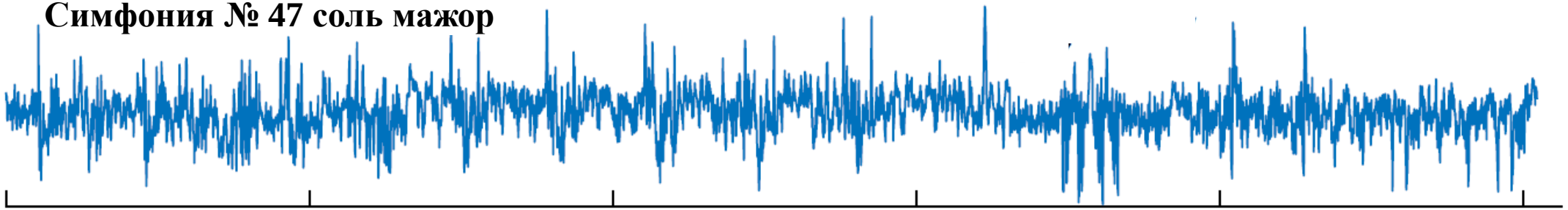
$$\{P, I\} := MP(A, m)$$
$$RA := \{i \mid P(i) < \alpha \cdot (\min(P) + \max(P))\}$$

* Reiss A., Stricker D. Introducing a new benchmarked dataset for activity monitoring. Proc. of the 16th Int. Symp. on Wearable Computers (ISWC). 2012. DOI: 10.1109/ISWC.2012.13.

Поиск перевертышей (semordnilap: god↔dog, lived↔devil, …)

Йозеф Гайдн
(Joseph Haydn)
1732-1809

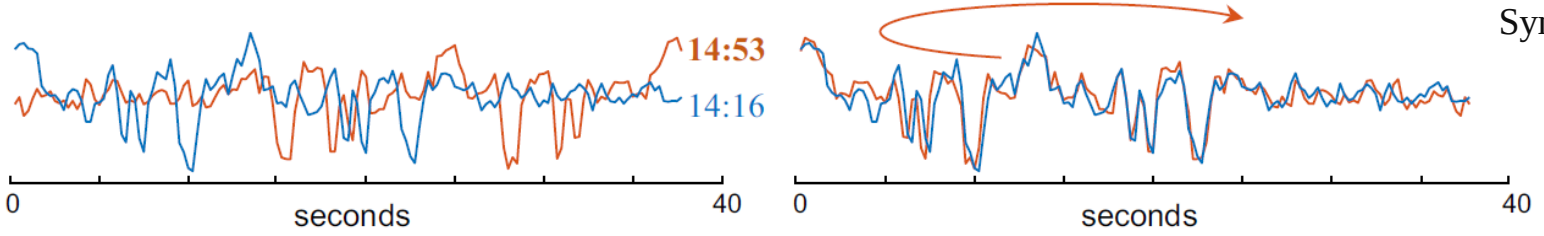
Симфония № 47 соль мажор



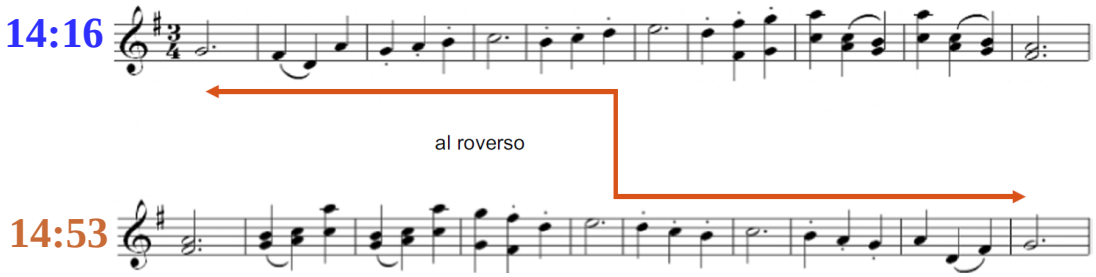
MFCC (Mel-frequency cepstral coefficients):
окно 0.5 с, перекрытие 50%

Joseph Haydn,
Symphony No. 47 in G major "Palindrome",
directed by Bruno Weil

Найденный мотив



Ноты мотива

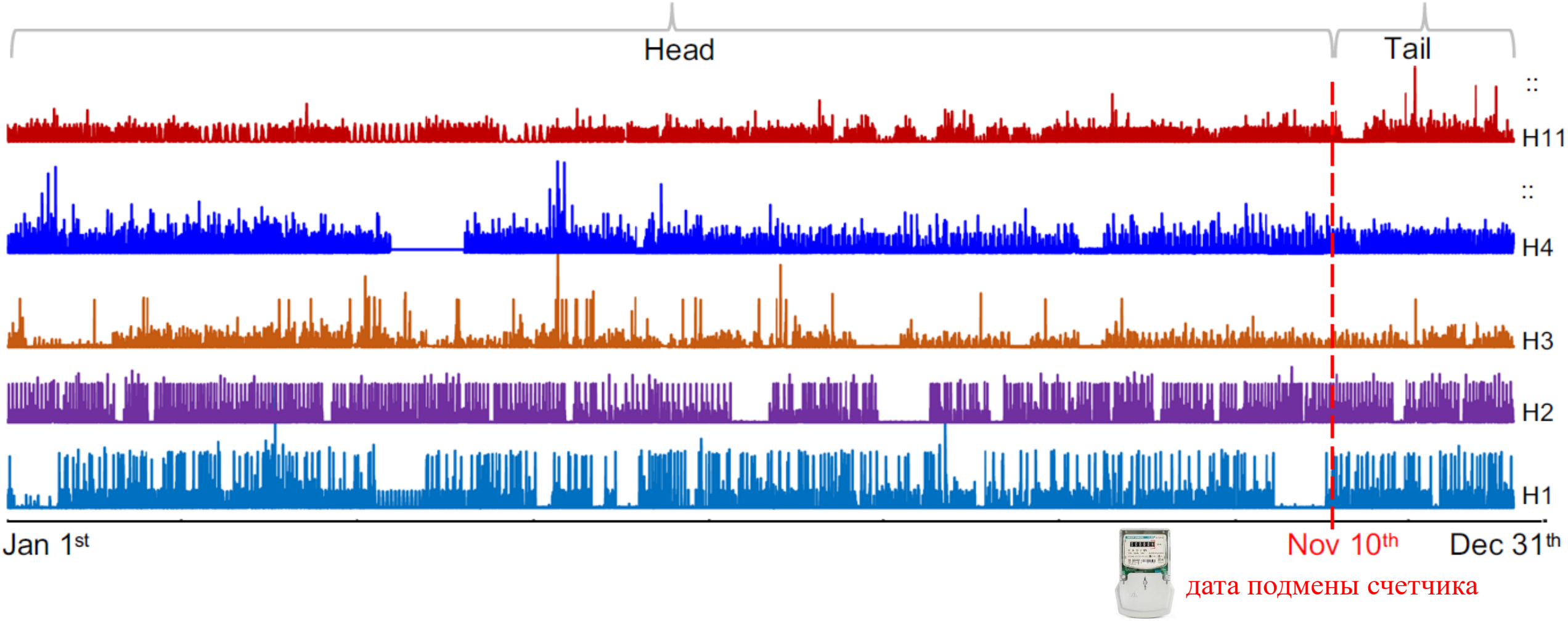


$$cisum := Reverse(music)$$

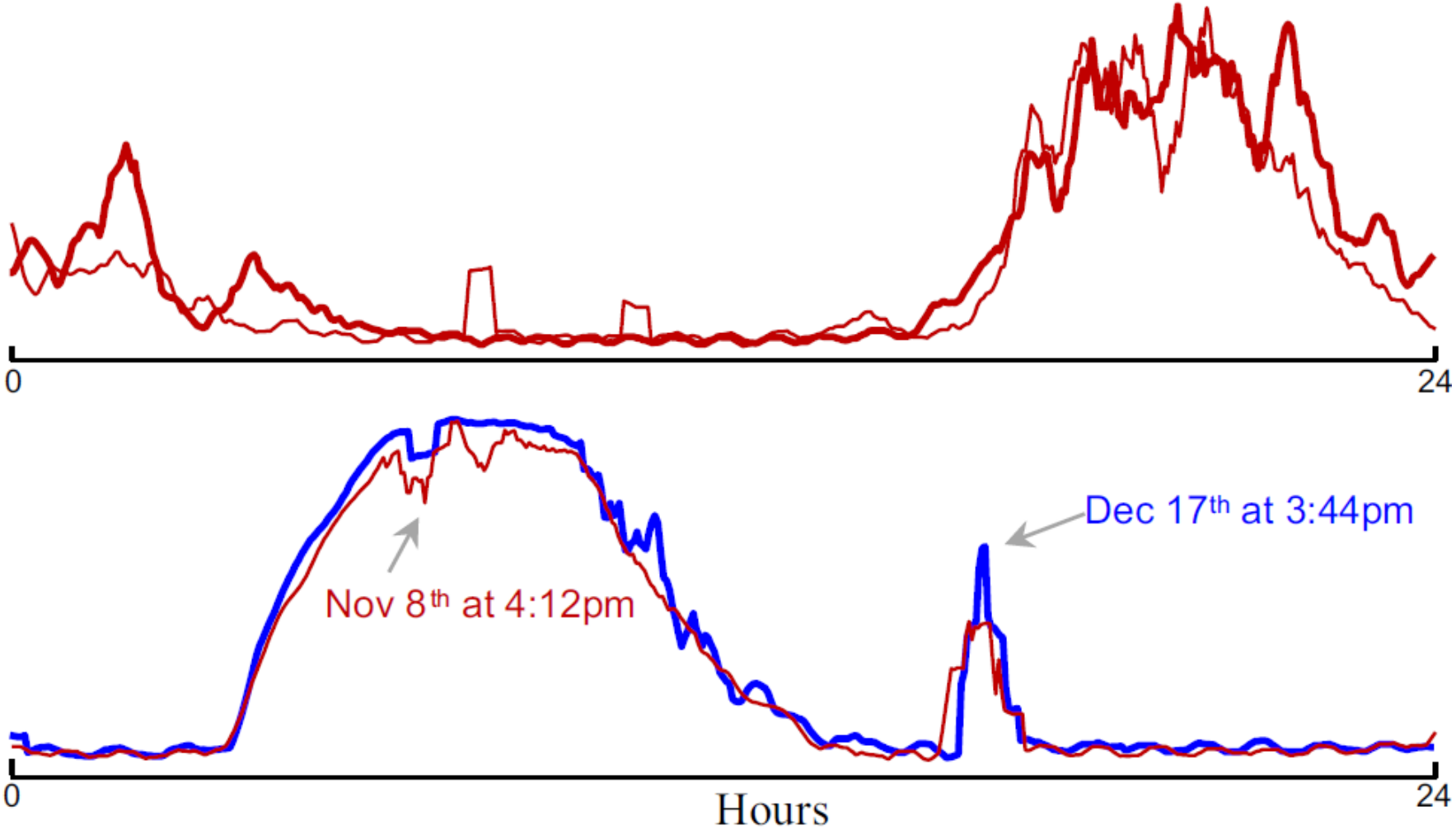
$$\{P, I\} := MPjoin(music, cisum, 150)$$ // 37.5 с

Раскрытие краж электричества подменой счетчиков (meter-swapping)

Раскрытие краж электричества подменой счетчиков (meter-swapping)



Раскрытие краж электричества подменой счетчиков (meter-swapping)



Top-1 мотив
$MPjoin(Head(H_{11}), Tail(H_{11}))$

$\mathrm{ED}(left, right) = 9.56$
(менее среднего расстояния
по всем домам)

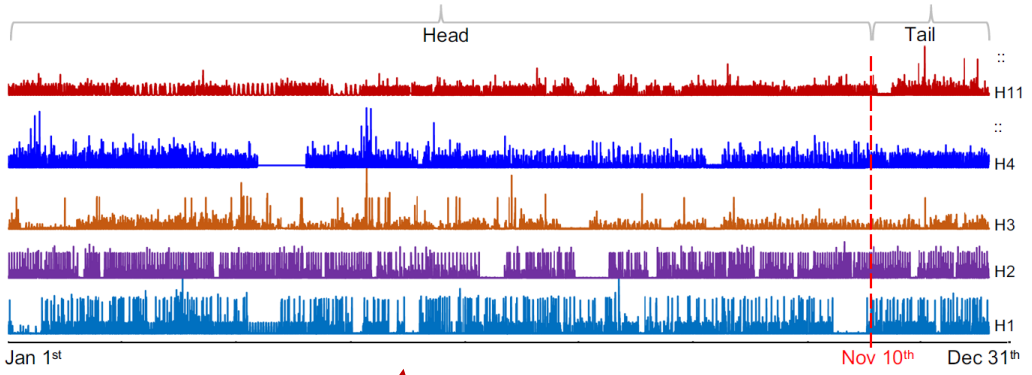
Top-1 мотив
$MPjoin(Head(H_{11}), Tail(H_4))$

$\mathrm{ED}(left, right) = 2.85$

Раскрытие краж электричества подменой счетчиков (meter-swapping)

$$SwapScore(H_i, H_j) = \frac{\min MPjoin(Head(H_i), Tail(H_j))}{\min MPjoin(Head(H_i), Tail(H_i)) + \varepsilon}$$

$minScore := +\infty$
for $i := 1$ **to** $NumHouse$ **do**
  $\{P, I\} := MPjoin(Head(H_i), Tail(H_i), m)$
  $minP := \min(P)$
  for $j := i + 1$ **to** $NumHouse$ **do**
    $\{J, JI\} := MPjoin(Head(H_i), Tail(H_j), m)$
    $SwapScore := \min(J)/(minP + \varepsilon)$
    if $SwapScore < minScore$ **then**
      $minScore := SwapScore$
      $suspect := \{H_i, H_j\}$



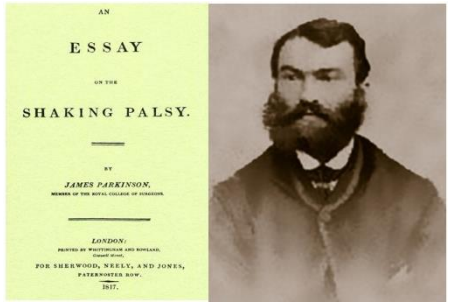
дата подмены счетчика

$suspect = \{H_{11}, H_4\}$

top-1 мотив
$Head(H_{11}), Tail(H_4)$

Кража со стороны H4

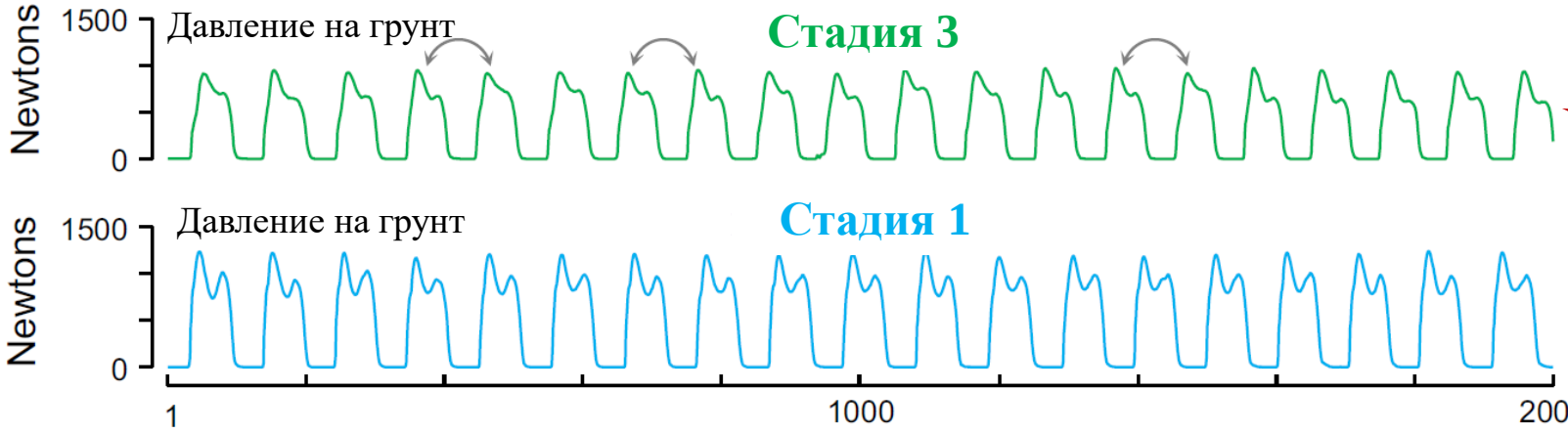
Оценка тяжести болезни Паркинсона



Джеймс Паркинсон
(James Parkinson)
1755-1824

Шкала Хён—Яра
(Hoehn M.M., Yahr M.D.)

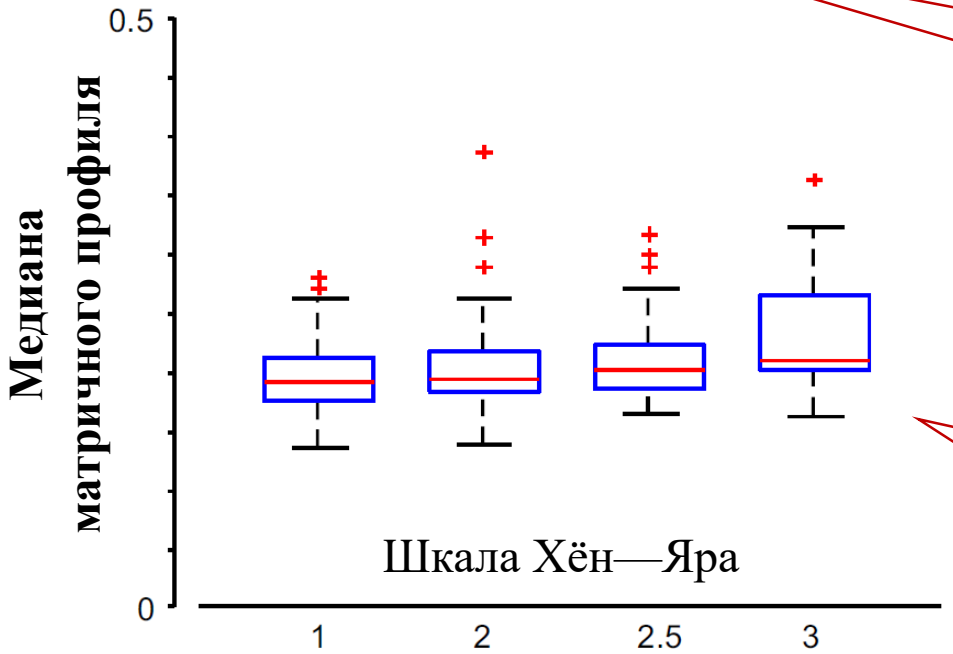
Стадия	Симптоматика
0	Нет признаков заболевания
1	Проявления на одной из конечностей
1.5	Проявления на одной из конечностей и туловище
2	Двусторонние проявления без постуральной неустойчивости
2.5	Двусторонние проявления с постуральной неустойчивостью
3	Двусторонние проявления. Постуральная неустойчивость. Способность к самообслуживанию
4	Обездвиженность, потребность в посторонней помощи. Способность ходить и/или стоять без поддержки
5	Обездвиженность, инвалидизация

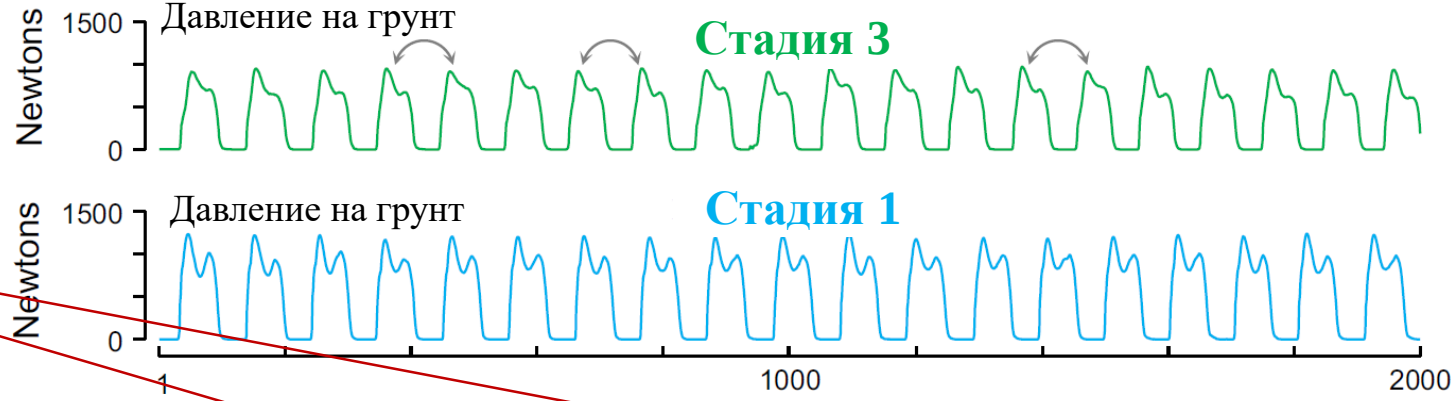


При нарушениях двигательной активности циклы походки повторяются не идеально

Оценка тяжести болезни Паркинсона

for $i \coloneqq 1$ **to** $NumPatients$ **do**
$\{P, I\} \coloneqq MP(PatientGait(i), m)$
$HoehnYahr(i) \coloneqq \text{median}(P)$





Нет отличий между соседями на ранних стадиях болезни,
сильные отличия на поздних стадиях.
Можно взять медиану матричного профиля в качестве индикатора

Эксперимент на наборе PhysioBank*
(93 ряда: 73 – стадия 1, 20 – стадии 2, 2.5, 3)
Медиана матричного профиля увеличивается на поздних стадиях

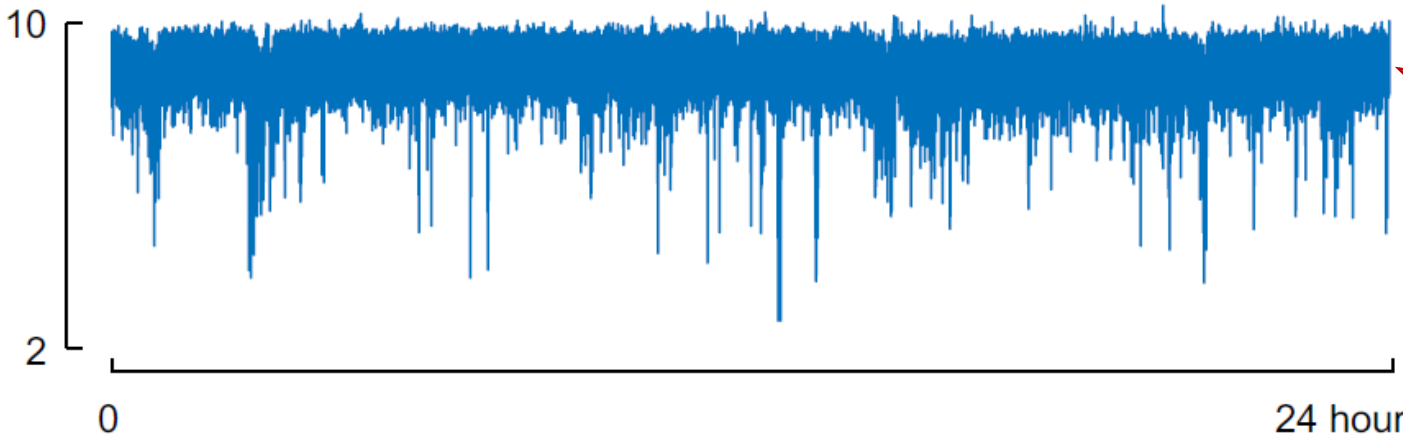
* Goldberger A.L., *et al.* PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. Circulation. 2000. 101(23), e215–e220. DOI: 10.1161/01.cir.101.23.e215

Обнаружение низкочастотных землетрясений (LFE, low-frequency earthquake)


Разлом Сан-Андреас, Калифорния (США)

- Станции FROB и JCNB в 10 км друг от друга снимают показания сейсмографа возле разлома Сан-Андреас (частота 20 Гц, 1.728 млн. точек за сутки)

- **Как автоматически фильтровать ложные LFE?**

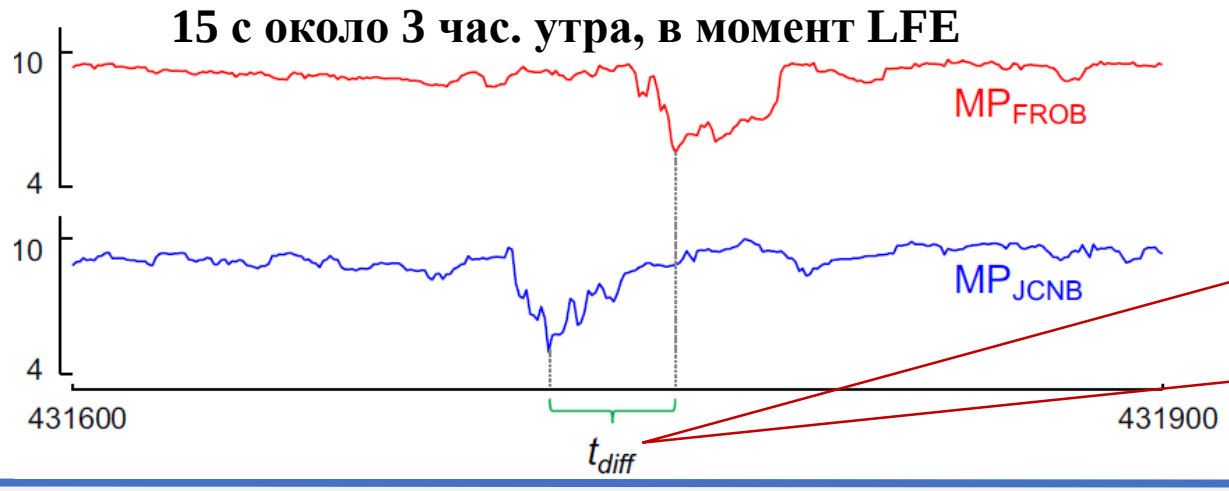


Матричный профиль суточной записи сейсмографа 9 октября 2007 на станции FROB

Лишь 10% «впадин» – истинные землетрясения

Обнаружение низкочастотных землетрясений (LFE, low-frequency earthquake)

- Шумы в сейсмографе локальны, но LFE обнаруживается им в близкие (но не идентичные) моменты времени
- В момент истинного LFE матричные профили разных станций показывают низкие значения. Наоборот, при ложном LFE *один* профиль покажет низкие значения, остальные – высокие
- Для фильтрации возьмем поэлементный максимум матричного профиля (?)

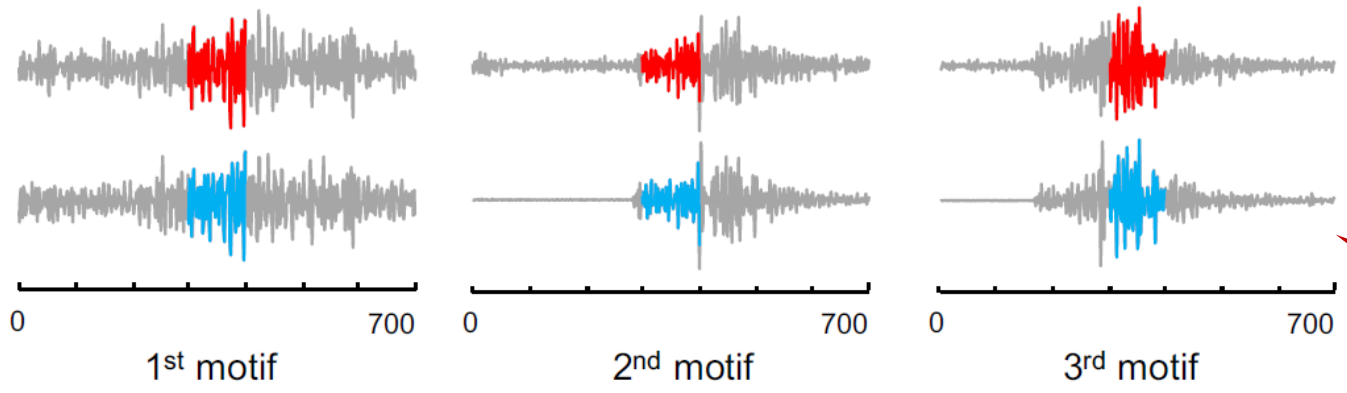


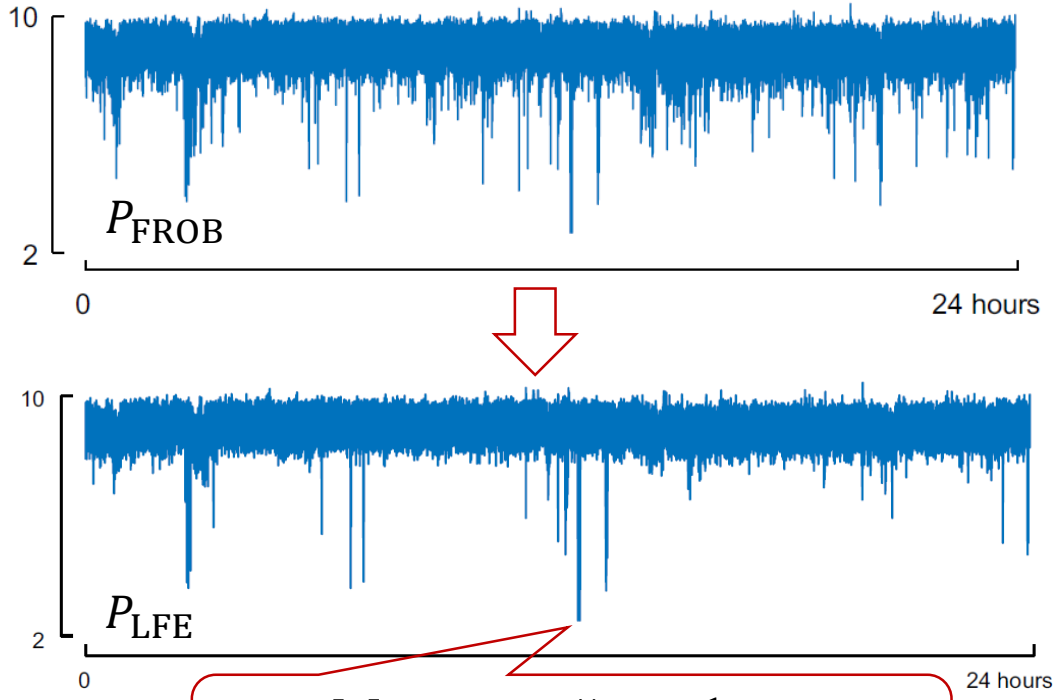
Поэлементный максимум не подходит

Эпицентр землетрясения ближе к JCNB, чем к FROB, поэтому имеется запаздывание t_{diff}. Скорость распространения волны 3-4 км/с, поэтому $t_{diff} \leq 5$ с (100 точек)

Обнаружение низкочастотных землетрясений (LFE, low-frequency earthquake)

$\{P_{\text{FROB}}, I_{\text{FROB}}\} := MP(FROB, m)$
$\{P_{\text{JCNB}}, I_{\text{JCNB}}\} := MP(JCNB, m)$
for $i := 1$ **to** $|FROB|$ **do**
$minVal := \min_{\max(i-100,1) \le k \le \min(i+100,|JCNB|)} P_{\text{JCNB}}(k)$
$minIdx := \arg\min_{\max(i-100,1) \le k \le \min(i+100,|JCNB|)} P_{\text{JCNB}}(k)$
$P_{\text{LFE}}(i) := \max(P_{\text{FROB}}(i), minVal)$
$I_{\text{LFE}}(i) := minIdx$





Матричный профиль с истинными землетрясениями

Top-3 мотива, найденных по очищенному матричному профилю (истинные LFE)

Содержание

- Понятие матричного профиля
- Примеры задач, решаемых на основе матричного профиля
- **Алгоритмы вычисления матричного профиля**
  - **STAMP**
  - **STOMP**
  - **SCRIMP, PreSCRIMP, SCRIMP++**

Алгоритм STAMP (Scalable Time series ~~Anytime~~ Matrix Profile*)

Algorithm *STAMP*

Input: ряды A, B, длина подп-ти m
Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}
Variables: профиль расст-я $D \in \mathbb{R}^{n_A - m + 1}$

$P_{AB} := \overline{+\infty}$; $I_{AB} := \bar{0}$
for $j := 1$ **to** $n_B - m + 1$ **do**
  $D := MASS(B_{j,m}, A)$
  for $i := 1$ **to** $n_A - m + 1$ **do**
    if $D(i) \leq P_{AB}(i)$ **then**
      $P_{AB}(i) := D(i)$
      $I_{AB}(i) := j$
return P_{AB}, I_{AB}

* Yeh C.M., Zhu Y., Ulanova L., Begum N., Ding Y., Dau H.A., Silva D.F., Mueen A., Keogh E.J. Matrix Profile I: All pairs similarity joins for time series: A unifying view that includes motifs, discords and shapelets. Proc. of the IEEE 16th Int. Conf. on Data Mining, ICDM 2016, Barcelona, Spain, 12–15 December 2016. pp. 1317–1322. https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0179

Алгоритм STAMP (Scalable Time series ~~Anytime~~ Matrix Profile)

Algorithm *STAMP*

Input: ряды A, B, длина подп-ти m
Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}
Variables: $D \in \mathbb{R}^{n_A - m + 1}$ профиль расст-я

$P_{AB} := \overline{+\infty}$; $I_{AB} := \bar{0}$
for $j := 1$ **to** $n_B - m + 1$ **do**
  $D := MASS(B_{j,m}, A)$
  for $i := 1$ **to** $n_A - m + 1$ **do**
    if $D(i) \leq P_{AB}(i)$ **then**
      $P_{AB}(i) := D(i)$
      $I_{AB}(i) := j$
return P_{AB}, I_{AB}

Алгоритм MASS
(Mueen's Algorithm for Similarity Search)
вычисляет профиль
z-нормализованного евклидова расстояния,
имеет сложность $O(n \log_2 n)$
(см. лекцию «Поиск по образцу»)

Сложность
STAMP

$\boldsymbol{O(n^2 \log_2 n)}$

Алгоритм STAMP (Scalable Time series ~~Anytime~~ Matrix Profile)

Algorithm $STAMP$

Input: ряды A, B, длина подп-ти m

Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}

Variables: $D \in \mathbb{R}^{n_A - m + 1}$ профиль расст-я

$P_{AB} := \overline{+\infty}$; $I_{AB} := \bar{0}$

for $j := 1$ **to** $n_B - m + 1$ **do**

  $D := MASS(B_{j,m}, A)$

  for $i := 1$ **to** $n_A - m + 1$ **do**

    if $D(i) \leq P_{AB}(i)$ **then**

      $P_{AB}(i) := D(i)$

      $I_{AB}(i) := j$

return P_{AB}, I_{AB}

Может быть реализовано
как поэлементная (векторная) операция

$ElementWiseMin(P_{AB}, I_{AB}, D, i)$

Алгоритм STAMP (Scalable Time series Anytime Matrix Profile)

Algorithm $STAMP$
Input: ряды A, B, длина подп-ти m,
флаг $CheckForUserInterrupt$
Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}
Variables: $D \in \mathbb{R}^{n_A - m + 1}$ профиль расст-я

$P_{AB} := \overline{+\infty}$; $I_{AB} := \bar{0}$
for each $j \in [1, n_B - m + 1]$ **in random order do**
$D := MASS(B_{j,m}, A)$
$ElementWiseMin(P_{AB}, I_{AB}, D, i)$
if $CheckForUserInterrupt =$ TRUE **then**
print "Приближенное решение", P_{AB}, I_{AB}
if $GetUserChoice =$ "Улучшить решение" **then**
continue
else
break

Алгоритм STAMP (Scalable Time series Anytime Matrix Profile)

Algorithm $STAMP$
Input: ряды A, B, длина подп-ти m,
флаг $CheckForUserInterrupt$
Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}
Variables: $D \in \mathbb{R}^{n_A - m + 1}$ профиль расст-я

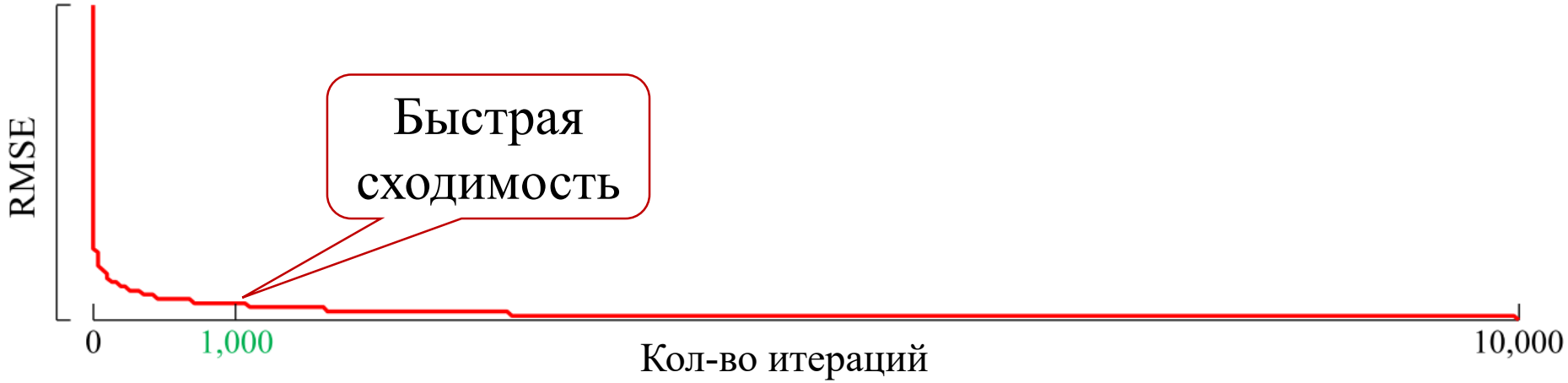
$P_{AB} := \overline{+\infty}$; $I_{AB} := \bar{0}$
for each $j \in [1, n_B - m + 1]$ **in random order do**
$D := MASS(B_{j,m}, A)$
$ElementWiseMin(P_{AB}, I_{AB}, D, i)$
if $CheckForUserInterrupt =$ TRUE **then**
print "Приближенное решение", P_{AB}, I_{AB}
if $GetUserChoice =$ "Улучшить решение" **then**
continue
else
break

Алгоритм с отсечением по времени* выдает допустимое (приближенное) решение, даже если он прерван до своего завершения

* Zilberstein S., Russell S. Approximate reasoning using anytime algorithms. Natarajan S. (eds) Imprecise and Approximate Computation. The Springer Intl. Series in Eng. and Comp. Sci. Vol 318. 1995. https://doi.org/10.1007/978-0-585-26870-5_4

Алгоритм STAMP (Scalable Time series Anytime Matrix Profile)

$$Root\ Mean\ Square\ Error = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(MP_i - \widetilde{MP}_i\right)^2}$$



Приближенный матричный профиль (ряд Random Walk) после 1000 итераций

Точный матричный профиль (ряд Random Walk)

Алгоритм STOMP (Scalable Time series Ordered-search Matrix Profile)*

- Сравнение с STAMP
  - также алгоритм anytime (с отсечением по времени)
  - вычисление профилей расстояния выполняются в естественном (а не в случайном) порядке подпоследовательностей ряда B и оптимизируются
- Применяет формулу $D_{T_{j,m}}(i) = \sqrt{2m(1 - \frac{\langle T_{j,m}, T_{i,m} \rangle - m\mu_{T_{j,m}}\mu_{T_{i,m}}}{m\sigma_{T_{j,m}}\sigma_{T_{i,m}}})}$

  (см. лекцию «Поиск по образцу»)
  - μ и σ вычисляются за $O(1)$ с помощью массивов кумулятивных сумм (функция $movstd$)
  - сложность вычисления $\langle T_{j,m}, T_{i,m} \rangle$ также приводится к $O(1)$

* Yeh C.M., Zhu Y., Ulanova L., Begum N., Ding Y., Dau H.A., Silva D.F., Mueen A., Keogh E.J. Matrix Profile I: All pairs similarity joins for time series: A unifying view that includes motifs, discords and shapelets. Proc. of the IEEE 16th Int. Conf. on Data Mining, ICDM 2016, Barcelona, Spain, 12–15 December 2016. pp. 1317–1322. https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0179

Алгоритм STOMP: Вычисление скалярных произведений за $O(1)$

- Введем обозначение: $QT_{j,i} = \langle T_{j,m}, T_{i,m} \rangle$
- Запишем $QT_{j-1,i-1}$ как сумму произведений:
  (1) $QT_{j-1,i-1} = \sum_{k=0}^{m-1} t_{j-1+k} \cdot t_{i-1+k}$
- Запишем $QT_{j,i}$ как сумму произведений:
  (2) $QT_{j,i} = \sum_{k=0}^{m-1} t_{j+k} \cdot t_{i+k}$
- Найдем разность (2)−(1) и получим:
  $QT_{j,i} = QT_{j-1,i-1} - t_{j-1} \cdot t_{i-1} + t_{j+m-1} \cdot t_{i+m-1}$ ■
- Для вычисления $QT_{1,1}$ используем $MASS(T_{1,m}, T)$

Алгоритм STOMP (Scalable Time series Ordered-search Matrix Profile)

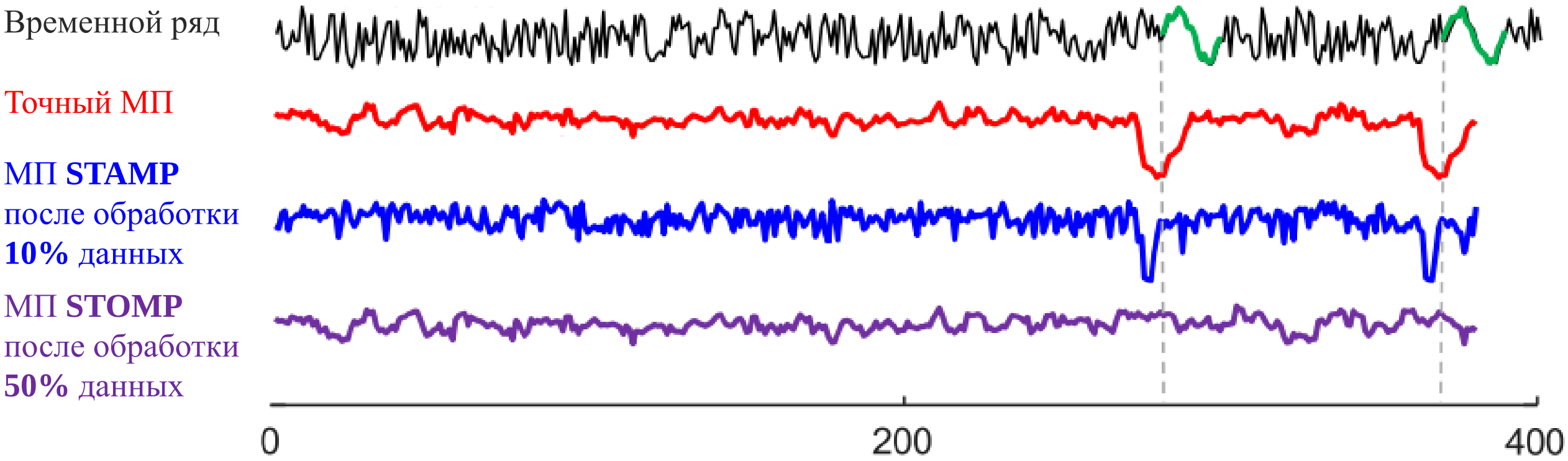
Algorithm $STOMP$
Input: ряды A, B, длина подп-ти m
Output: МП P_{AB}, индекс МП I_{AB}

$\{D, QT\} \coloneqq MASS(B_{1,m}, A); \{DB, QTB\} \coloneqq MASS(A_{1,m}, B)$
$P_{AB} \coloneqq D; I_{AB} \coloneqq 1$
for $i \coloneqq 2$ **to** $n_B - m + 1$ **do**
  for $j \coloneqq n_B - m + 1$ **downto** 2 **do**
    $QT(j) \coloneqq QT(j-1) - a_{j-1} \cdot b_{i-1} + a_{j+m-1} \cdot b_{i+m-1}$
  $QT(1) \coloneqq QTB(i)$
  $\{\mu_B, \sigma_B, \mu_A, \sigma_A\} \coloneqq CalcMeanStd(B_{i,m}, A)$
  $D \coloneqq CalcDistProfile(QT, \mu_B, \sigma_B, \mu_A, \sigma_A)$
  $\{P_{AB}, I_{AB}\} \coloneqq ElementWiseMin(P_{AB}, I_{AB}, D, i)$
return $\{P_{AB}, I_{AB}\}$

Сложность STOMP
$\boldsymbol{O(n^2)}$

$$D_{T_{j,m}}(i) = \sqrt{2m\left(1 - \frac{\langle T_{j,m}, T_{i,m}\rangle - m\mu_{T_{j,m}}\mu_{T_{i,m}}}{m\sigma_{T_{j,m}}\sigma_{T_{i,m}}}\right)}$$

Когда STOMP хуже STAMP

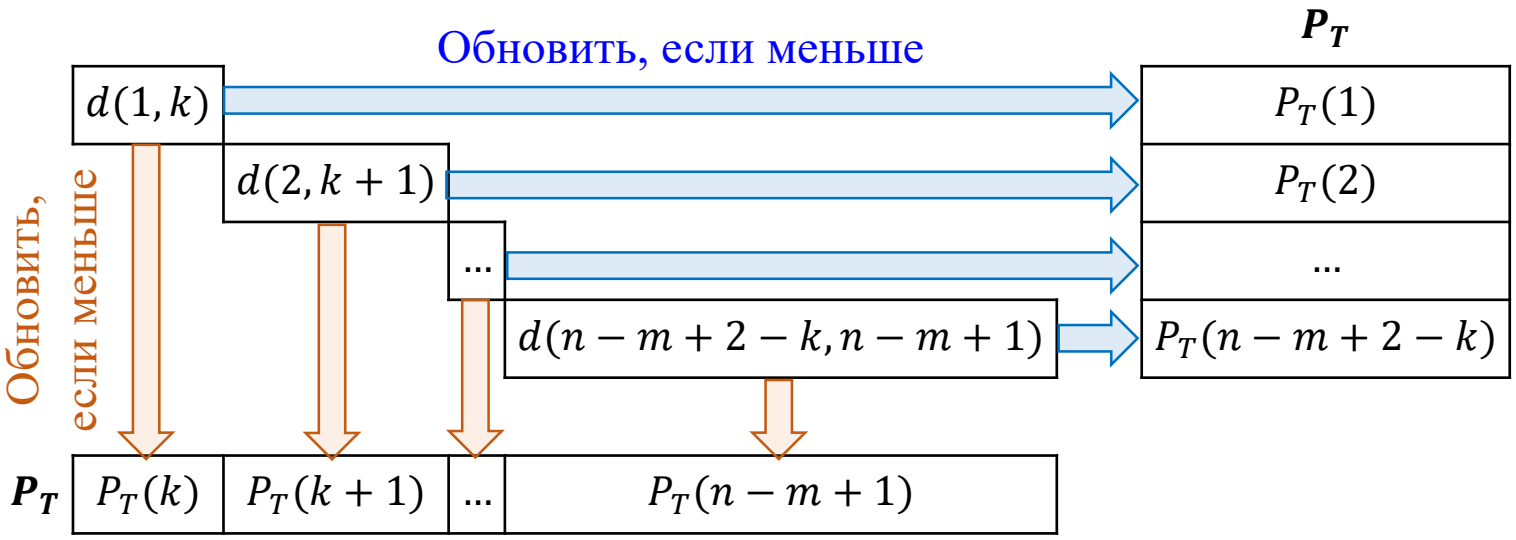


Мотивы расположены только справа, а случайные данные – слева.
Сходимость STOMP будет быстрой, как в STAMP,
но лучшие мотивы не будут обнаружены до финальных итераций алгоритма

Алгоритм SCRIMP («скупой»)*

Algorithm *SCRIMP*
Input: ряд T, длина подп-ти m
Output: МП P_T, индекс МП I_T

$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(^m/_4 + 1..n - m + 1)$
for $k \in Order$ **do**
  for $i \coloneqq 1$ **to** $n - m + 2 - k$ **do**
    if $i = 1$ **then**
      $QT \coloneqq DotProduct(T_{1,m}, T_{k,m})$
    else
      $QT \coloneqq QT - t_{i-1} \cdot t_{i+k-2} + t_{i+m-1} \cdot t_{i+m+k-2}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_i, \sigma_i, \mu_{i+k-1}, \sigma_{i+k-1})$
    if $d < P_T(i)$ **then**
      $P_T(i) \coloneqq d$; $I_T(i) \coloneqq i + k - 1$
    if $d < P_T(i + k - 1)$ **then**
      $P_T(i + k - 1) \coloneqq d$; $I_T(i) \coloneqq i$
return $\{P_T, I_T\}$

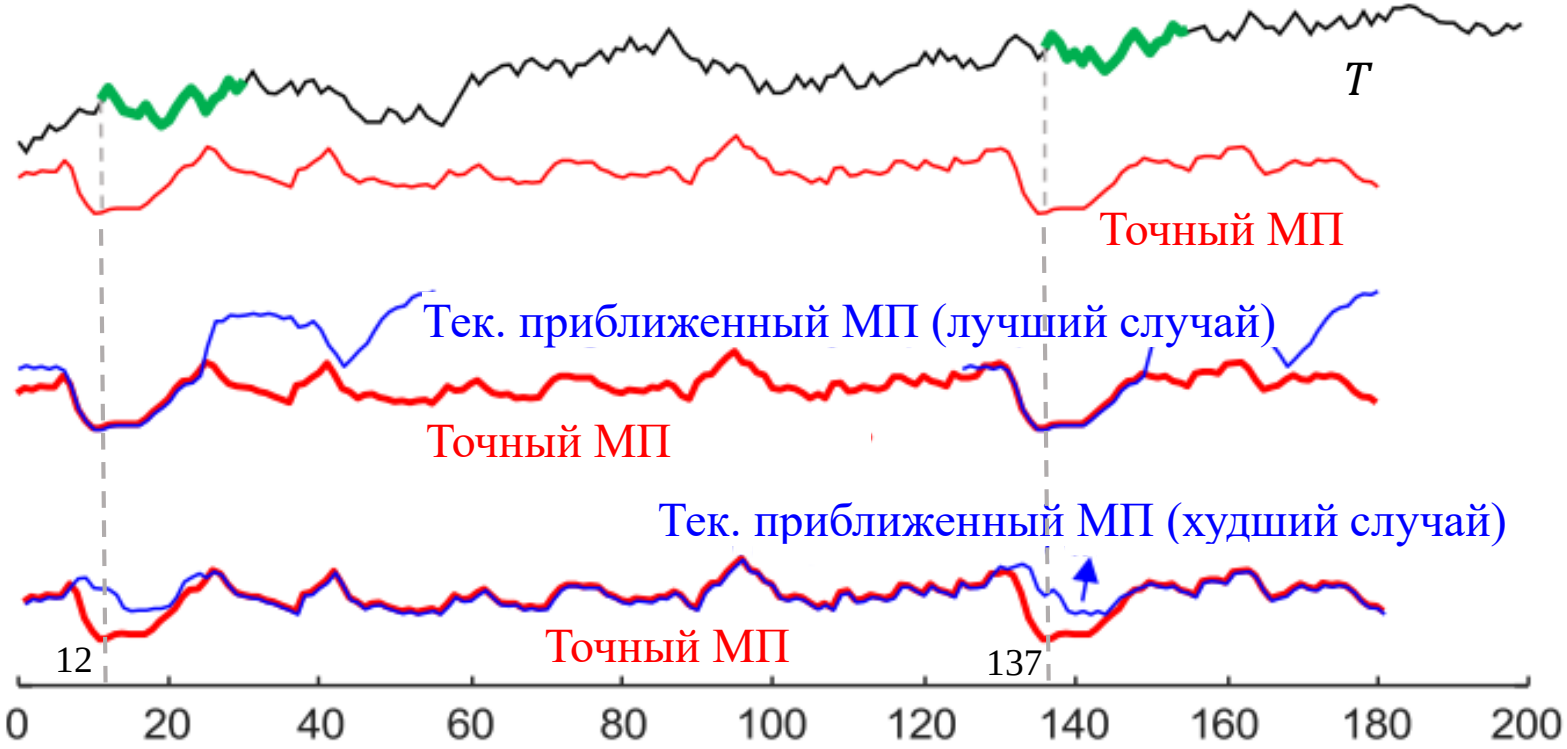


На каждом шаге обрабатывается случайная диагональ матрицы расстояний между подпоследовательностями S_T^m (т.е. SCRIMP – алгоритм вида anytime)

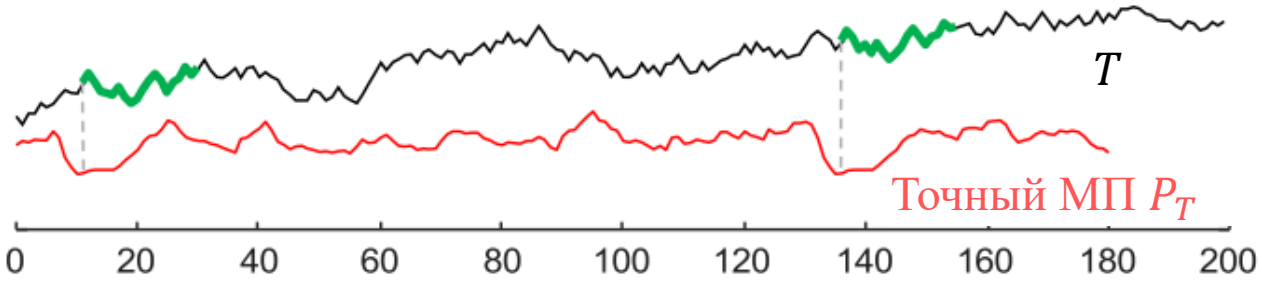
* Zhu Y., Yeh C.M., Zimmerman Z., Kamgar K., Keogh E. Matrix Profile XI: SCRIMP++: Time Series Motif Discovery at Interactive Speeds. Proc. of the IEEE 18th Int. Conf. on Data Mining, ICDM 2018, Singapore, November 17-20, 2018. pp. 837-846. https://doi.org/10.1109/ICDM.2018.00099.

В чем проблема SCRIMP

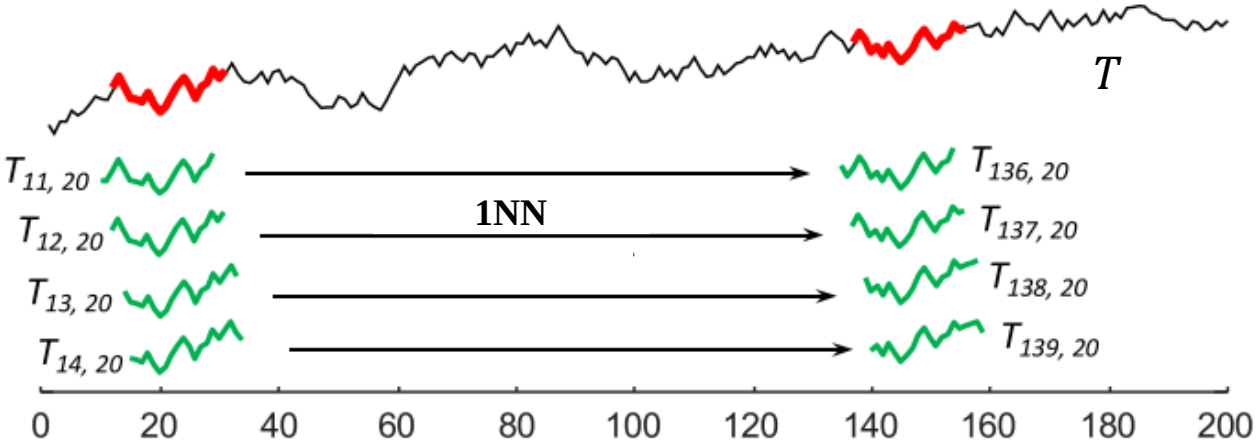
Чтобы найти мотивы, нужно вычислить диагональ матрицы расстояний, которая начинается с $d(1,126)$ на самой ранней стадии. Иначе надо ждать 100% итераций. В отличие от STOMP, SCRIMP не зависит от локации мотива, но вероятность обработки до k-й итерации невысока: $^{k}/_{n-m+1}$



Свойство последовательного сохранения соседства (Consecutive Neighborhood Preserving Property)



	1	2	3	4	...	7	8	9	...	24	25	...
I_T	56	57	112	113	...	116	133	134	...	149	150	...

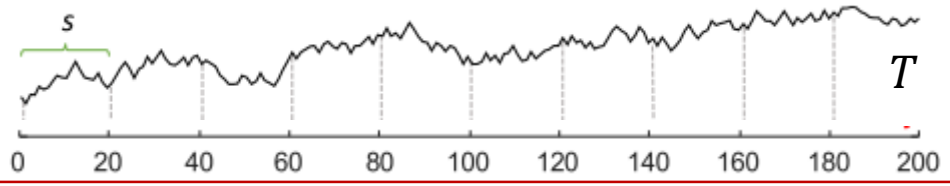


Если $T_{i,m}$ очень похожа на $T_{j,m}$, то с высокой вероятностью $T_{i+1,m}$ очень похожа на $T_{j+1,m}$

Алгоритм PreSCRIMP (SCRIMP с предобработкой данных)

Algorithm $PreSCRIMP$
Input: ряд T, длина подп-ти m, интервал s
Output: МП P_T, индекс МП I_T
$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(1..n-m+1 \textbf{ step } s)$
for $i \in Order$ **do**
  $D \coloneqq MASS(T_{i,m}, T)$
  $\{P_T, I_T\} \coloneqq ElementWiseMin(P_T, I_T, D, i)$
  $\{P_T(i), I_T(i)\} \coloneqq \min D$
  $j \coloneqq I_T(i)$
  $QT \coloneqq CalcDotProduct(P_T(i), \mu_{T_{i,m}}, \sigma_{T_{i,m}}, \mu_{T_{j,m}}, \sigma_{T_{j,m}})$
  $QT2 \coloneqq QT$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, n-m+1-\max(i,j))$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i+k-1} \cdot t_{j+k-1} + t_{i+k+m-1} \cdot t_{j+k+m-1}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i+k,m}}, \sigma_{T_{i+k,m}}, \mu_{T_{j+k,m}}, \sigma_{T_{j+k,m}})$
    if $d < P_T(i+k)$ **then**
      $P_T(i+k) \coloneqq d$; $I_T(i+k) \coloneqq j+k$
    if $d < P_T(j+k)$ **then**
      $P_T(j+k) \coloneqq d$; $I_T(j+k) \coloneqq i+k$
  $QT \coloneqq QT2$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, i-1, j-1)$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i-k+m} \cdot t_{j-k+m} + t_{i-k} \cdot t_{j-k}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i-k,m}}, \sigma_{T_{i-k,m}}, \mu_{T_{j-k,m}}, \sigma_{T_{j-k,m}})$
    if $d < P_T(i-k)$ **then**
      $P_T(i-k) \coloneqq d$; $I_T(i-k) \coloneqq j-k$
    if $d < P_T(j-k)$ **then**
      $P_T(j-k) \coloneqq d$; $I_T(j-k) \coloneqq i-k$
return $\{P_T, I_T\}$

Выполним сэмплинг подпоследов-тей с **интервалом *s***.
Пусть выбрана $T_{i,m}$ и $\theta_{1\text{NN}}(T_{i,m}, T_{j,m}) = \text{TRUE}$.
Тогда с высокой вероятностью $\theta_{1\text{NN}}(T_{i+k,m}, T_{j+k,m}) = \text{TRUE}$
где $k \in (1-s, 2-s, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s-2, s-1)$



Алгоритм PreSCRIMP (SCRIMP с предобработкой данных)

Algorithm $PreSCRIMP$
Input: ряд T, длина подп-ти m, интервал s
Output: МП P_T, индекс МП I_T
$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(1..n-m+1 \textbf{ step } s)$
for $i \in Order$ **do**
  $D \coloneqq MASS(T_{i,m}, T)$
  $\{P_T, I_T\} \coloneqq ElementWiseMin(P_T, I_T, D, i)$
  $\{P_T(i), I_T(i)\} \coloneqq \min D$
  $j \coloneqq I_T(i)$
  $QT \coloneqq CalcDotProduct(P_T(i), \mu_{T_{i,m}}, \sigma_{T_{i,m}}, \mu_{T_{j,m}}, \sigma_{T_{j,m}})$
  $QT2 \coloneqq QT$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, n-m+1-\max(i,j))$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i+k-1} \cdot t_{j+k-1} + t_{i+k+m-1} \cdot t_{j+k+m-1}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i+k,m}}, \sigma_{T_{i+k,m}}, \mu_{T_{j+k,m}}, \sigma_{j+k,m})$
    if $d < P_T(i+k)$ **then**
      $P_T(i+k) \coloneqq d$; $I_T(i+k) \coloneqq j+k$
    if $d < P_T(j+k)$ **then**
      $P_T(j+k) \coloneqq d$; $I_T(j+k) \coloneqq i+k$
  $QT \coloneqq QT2$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, i-1, j-1)$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i-k+m} \cdot t_{j-k+m} + t_{i-k} \cdot t_{j-k}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i-k,m}}, \sigma_{T_{i-k,m}}, \mu_{T_{j-k,m}}, \sigma_{T_{j-k,m}})$
    if $d < P_T(i-k)$ **then**
      $P_T(i-k) \coloneqq d$; $I_T(i-k) \coloneqq j-k$
    if $d < P_T(j-k)$ **then**
      $P_T(j-k) \coloneqq d$; $I_T(j-k) \coloneqq i-k$
return $\{P_T, I_T\}$

Вычисление МП для выбранной подпоследовательности $T_{i,m}$, где $\theta_{1\text{NN}}(T_{i,m}, T_{j,m}) = \text{TRUE}$

Алгоритм PreSCRIMP (SCRIMP с предобработкой данных)

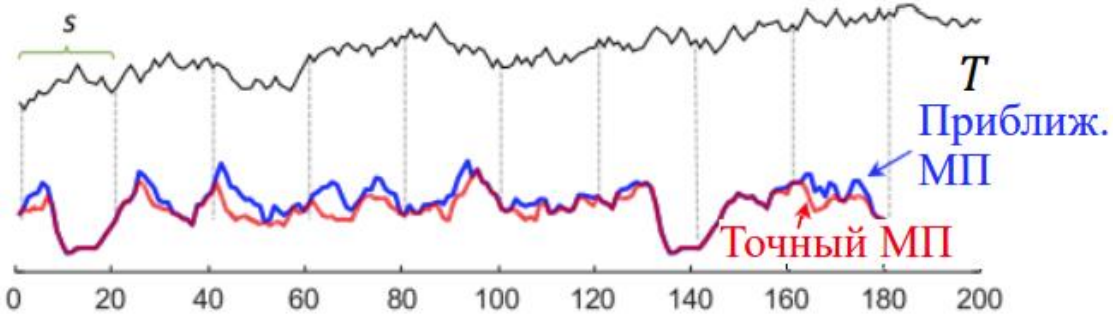
Algorithm $PreSCRIMP$
Input: ряд T, длина подп-ти m, интервал s
Output: МП P_T, индекс МП I_T
$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(1..n-m+1 \textbf{ step } s)$
for $i \in Order$ **do**
  $D \coloneqq MASS(T_{i,m}, T)$
  $\{P_T, I_T\} \coloneqq ElementWiseMin(P_T, I_T, D, i)$
  $\{P_T(i), I_T(i)\} \coloneqq \min D$
  $j \coloneqq I_T(i)$
  $QT \coloneqq CalcDotProduct(P_T(i), \mu_{T_{i,m}}, \sigma_{T_{i,m}}, \mu_{T_{j,m}}, \sigma_{T_{j,m}})$
  $QT2 \coloneqq QT$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, n-m+1-\max(i,j))$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i+k-1} \cdot t_{j+k-1} + t_{i+k+m-1} \cdot t_{j+k+m-1}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i+k,m}}, \sigma_{T_{i+k,m}}, \mu_{T_{j+k,m}}, \sigma_{j+k,m})$
    if $d < P_T(i+k)$ **then**
      $P_T(i+k) \coloneqq d$; $I_T(i+k) \coloneqq j+k$
    if $d < P_T(j+k)$ **then**
      $P_T(j+k) \coloneqq d$; $I_T(j+k) \coloneqq i+k$
  $QT \coloneqq QT2$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, i-1, j-1)$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i-k+m} \cdot t_{j-k+m} + t_{i-k} \cdot t_{j-k}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i-k,m}}, \sigma_{T_{i-k,m}}, \mu_{T_{j-k,m}}, \sigma_{T_{j-k,m}})$
    if $d < P_T(i-k)$ **then**
      $P_T(i-k) \coloneqq d$; $I_T(i-k) \coloneqq j-k$
    if $d < P_T(j-k)$ **then**
      $P_T(j-k) \coloneqq d$; $I_T(j-k) \coloneqq i-k$
return $\{P_T, I_T\}$

Уточнение МП для окрестности подпоследовательности $T_{i,m}$

1. Вычисляем попарные расстояния $(T_{i+1,m}, T_{j+1,m})$, … до следующей отобранной подпоследовательности или конца ряда
2. Вычисляем попарные расстояния $(T_{i-1,m}, T_{j-1,m})$, … до предыдущей отобранной подпоследовательности или начала ряда
3. Уточняем МП и индекс МП, если нашли меньшее расстояние

Алгоритм PreSCRIMP (SCRIMP с предобработкой данных)

Algorithm $PreSCRIMP$
Input: ряд T, длина подп-ти m, интервал s
Output: МП P_T, индекс МП I_T
$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(1..n-m+1 \textbf{ step } s)$
for $i \in Order$ **do**
  $D \coloneqq MASS(T_{i,m}, T)$
  $\{P_T, I_T\} \coloneqq ElementWiseMin(P_T, I_T, D, i)$
  $\{P_T(i), I_T(i)\} \coloneqq \min D$
  $j \coloneqq I_T(i)$
  $QT \coloneqq CalcDotProduct(P_T(i), \mu_{T_{i,m}}, \sigma_{T_{i,m}}, \mu_{T_{j,m}}, \sigma_{T_{j,m}})$
  $QT2 \coloneqq QT$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, n-m+1-\max(i,j))$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i+k-1} \cdot t_{j+k-1} + t_{i+k+m-1} \cdot t_{j+k+m-1}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i+k,m}}, \sigma_{T_{i+k,m}}, \mu_{T_{j+k,m}}, \sigma_{j+k,m})$
    if $d < P_T(i+k)$ **then**
      $P_T(i+k) \coloneqq d$; $I_T(i+k) \coloneqq j+k$
    if $d < P_T(j+k)$ **then**
      $P_T(j+k) \coloneqq d$; $I_T(j+k) \coloneqq i+k$
  $QT \coloneqq QT2$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, i-1, j-1)$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i-k+m} \cdot t_{j-k+m} + t_{i-k} \cdot t_{j-k}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i-k,m}}, \sigma_{T_{i-k,m}}, \mu_{T_{j-k,m}}, \sigma_{T_{j-k,m}})$
    if $d < P_T(i-k)$ **then**
      $P_T(i-k) \coloneqq d$; $I_T(i-k) \coloneqq j-k$
    if $d < P_T(j-k)$ **then**
      $P_T(j-k) \coloneqq d$; $I_T(j-k) \coloneqq i-k$
return $\{P_T, I_T\}$



PreSCRIMP хорошо приближает МП, особенно для минимумов МП (мотивы)

Алгоритм PreSCRIMP (SCRIMP с предобработкой данных)

Algorithm *PreSCRIMP*
Input: ряд T, длина подп-ти m, интервал s
Output: МП P_T, индекс МП I_T
$\{\mu_T, \sigma_T\} \coloneqq CalcMeanStd(T, m)$
$P_T \coloneqq \overline{+\infty}$; $I_T \coloneqq \bar{1}$
$Order \coloneqq RandPermutation(1..n-m+1 \textbf{ step } s)$
for $i \in Order$ **do**
  $D \coloneqq MASS(T_{i,m}, T)$
  $\{P_T, I_T\} \coloneqq ElementWiseMin(P_T, I_T, D, i)$
  $\{P_T(i), I_T(i)\} \coloneqq \min D$
  $j \coloneqq I_T(i)$
  $QT \coloneqq CalcDotProduct(P_T(i), \mu_{T_{i,m}}, \sigma_{T_{i,m}}, \mu_{T_{j,m}}, \sigma_{T_{j,m}})$
  $QT2 \coloneqq QT$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, n-m+1-\max(i,j))$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i+k-1} \cdot t_{j+k-1} + t_{i+k+m-1} \cdot t_{j+k+m-1}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i+k,m}}, \sigma_{T_{i+k,m}}, \mu_{T_{j+k,m}}, \sigma_{j+k,m})$
    if $d < P_T(i+k)$ **then**
      $P_T(i+k) \coloneqq d$; $I_T(i+k) \coloneqq j+k$
    if $d < P_T(j+k)$ **then**
      $P_T(j+k) \coloneqq d$; $I_T(j+k) \coloneqq i+k$
  $QT \coloneqq QT2$
  for $k \coloneqq 1$ **to** $\min(s-1, i-1, j-1)$ **do**
    $QT \coloneqq QT - t_{i-k+m} \cdot t_{j-k+m} + t_{i-k} \cdot t_{j-k}$
    $d \coloneqq CalcDistance(QT, \mu_{T_{i-k,m}}, \sigma_{T_{i-k,m}}, \mu_{T_{j-k,m}}, \sigma_{T_{j-k,m}})$
    if $d < P_T(i-k)$ **then**
      $P_T(i-k) \coloneqq d$; $I_T(i-k) \coloneqq j-k$
    if $d < P_T(j-k)$ **then**
      $P_T(j-k) \coloneqq d$; $I_T(j-k) \coloneqq i-k$
return $\{P_T, I_T\}$

Сложность: PreSCRIMP $O(\frac{1}{s}n^2\log_2 n)$, STOMP/STAMP: $O(n^2\log_2 n)$

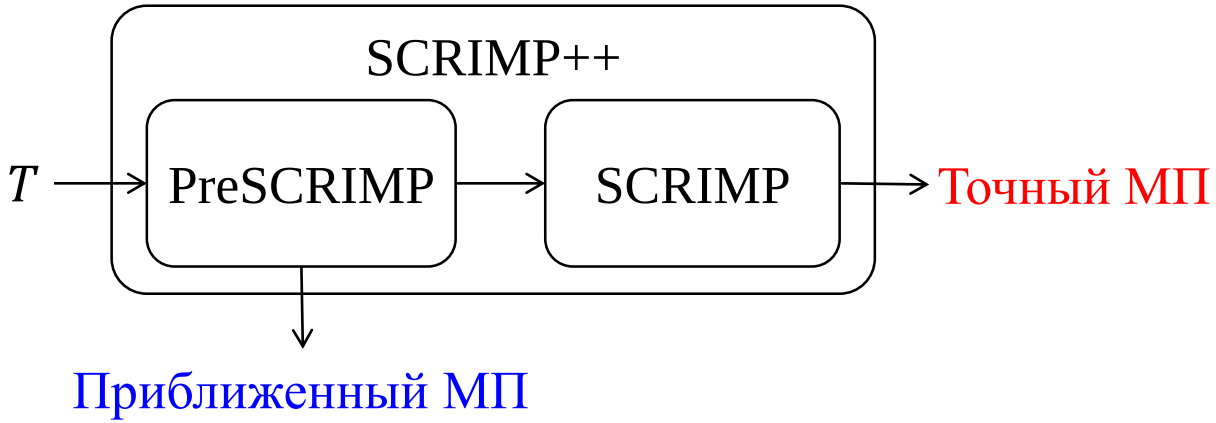
Как выбирать s?

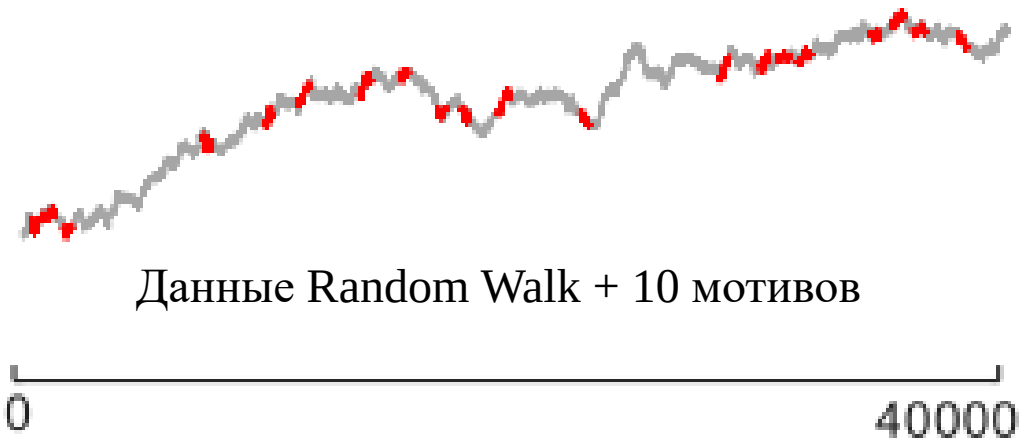
Невыбранная подпоследовательность должна пересекаться с одной из выбранных минимум в $1-\frac{s}{2m}$ точках. Типичное значение: $s=\frac{m}{4}$.

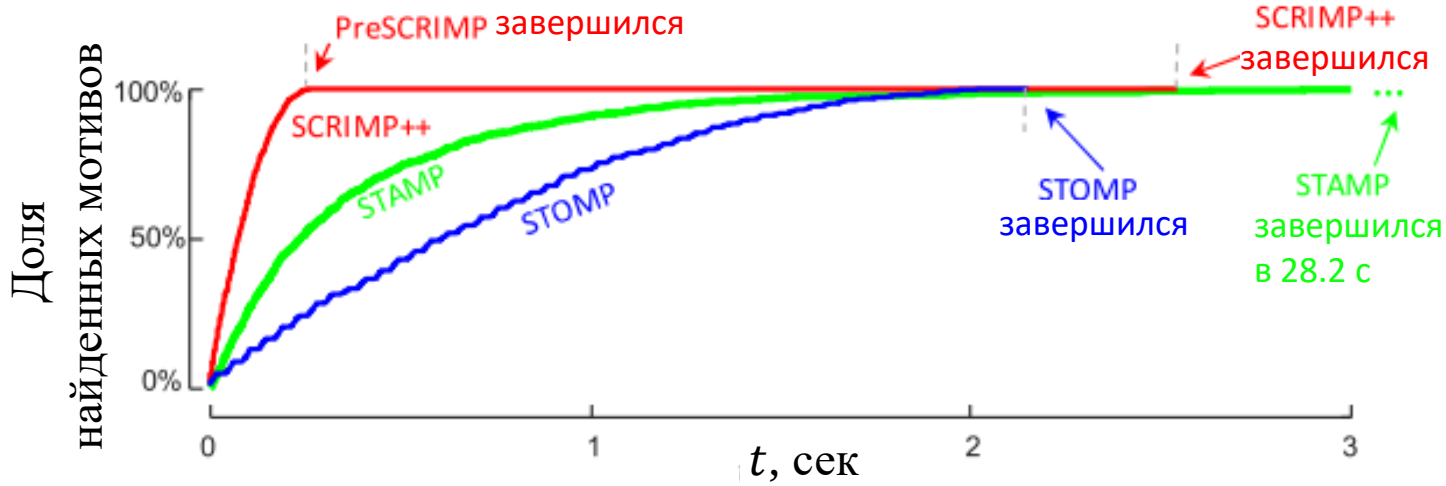
Тогда сложность PreSCRIMP $O(\frac{1}{m}n^2\log_2 n)$,

т.е. небольшая часть от сложности STOMP/STAMP.

Алгоритм SCRIMP++ = PreSCRIMP+SCRIMP







Intel Core i7-7700 CPU @ 3.6GHz, 64GB RAM

Алгоритмы вычисления матричного профиля

Наиболее быстрый алгоритм для случая одномерного ряда

Алгоритм	Anytime	Инкрементный	Параллельный	Платформа	Многомерный
STAMP[1]	✓			CPU	
STAMP*I*[1]		✓		CPU	
STOMP[1]	✓			CPU	
GPU-STOMP[2]	✓		✓	GPU	
SCRIMP++[3]	✓			CPU	
SCRIMP++[4]			✓	cluster	
SCAMP[5]			✓	CPU, GPU, cluster	
TraTSA[6]			✓	FPGA	
(MP)^{N} [7]			✓	cluster	✓

1. Yeh C.-C.M. *et al.* Matrix Profile I: All pairs similarity joins for time series: A unifying view that includes motifs, discords and shapelets. ICDM 2016. pp. 1317-1322. https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0179.
2. Zhu Y. *et al.* Matrix profile II: Exploiting a novel algorithm and GPUs to break the one hundred million barrier for time series motifs and joins. ICDM 2016. pp. 739-748. https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0085
3. Zhu Y. *et al.* Matrix profile XI: SCRIMP++: time series motif discovery at interactive speeds. ICDM 2018. pp. 837-846. https://doi.org/10.1109/ICDM.2018.00099
4. Pfeilschifter G. Time series analysis with matrix profile on HPC systems // Master thesis, Department of Informatics, Technical University of Munich, Germany. 2019. URL: http://mediatum.ub.tum.de/doc/1471292/1471292.pdf.
5. Zimmerman Z. *et al.* Matrix Profile XIV: Scaling time series motif discovery with GPUs to break a quintillion pairwise comparisons a day and beyond. SoCC 2019. pp. 74-86. https://doi.org/10.1145/3357223.3362721
6. Fernandez R.Q. *et al.* TraTSA: A Transprecision framework for efficient time series analysis. Journal of Computational Science. Vol.63, 2022. Art. 101784. https://doi.org/10.1016/j.jocs.2022.101784.
7. Raoofy A. *et al.* Time series mining at petascale performance. LNCS. 2020. Vol. 12151. pp. 104-123. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50743-5_6.

Литература

1. Yeh C.M., Zhu Y., Ulanova L., Begum N., Ding Y., Dau H.A., Silva D.F., Mueen A., Keogh E.J. Matrix Profile I: All pairs similarity joins for time series: A unifying view that includes motifs, discords and shapelets. Proc. of the IEEE 16th Int. Conf. on Data Mining, ICDM 2016, Barcelona, Spain, 12-15 December 2016. pp. 1317-1322. https://doi.org/10.1109/ICDM.2016.0179.
2. Zhu Y., Yeh C.M., Zimmerman Z., Kamgar K., Keogh E. Matrix Profile XI: SCRIMP++: Time Series Motif Discovery at Interactive Speeds. Proc. of the IEEE 18th Int. Conf. on Data Mining, ICDM 2018, Singapore, November 17-20, 2018. pp. 837-846. https://doi.org/10.1109/ICDM.2018.00099.
3. Zhu Y., Gharghabi S., Silva D.F., Dau H.A., Yeh C.-C.M., Senobari N.S., Almaslukh A., Kamgar K., Zimmerman Z., Funning G., Mueen A., Keogh E. The Swiss army knife of time series data mining: Ten useful things you can do with the matrix profile and ten lines of code. Data Min. Knowl. Discov. 34(4): 949-979 (2020). https://doi.org/10.1007/s10618-019-00668-6.
4. Keogh E.J. The UCR Matrix Profile Page. URL: https://www.cs.ucr.edu/~eamonn/MatrixProfile.html.