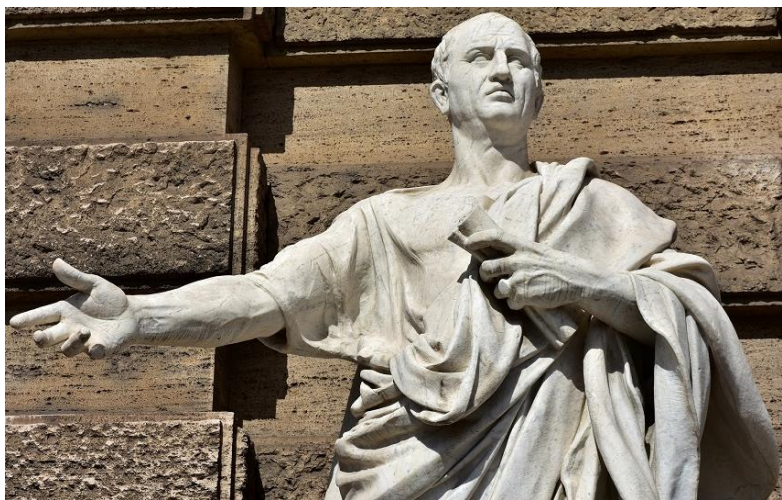


# Введение в дисциплину «Анализ и прогнозирование временных рядов методами искусственного интеллекта»\*



*Невольно изречешь: о tempora, о mores! —  
Когда поразглядишь, какая в жизни горесть.*

*Н.А. Некрасов*

---

\* При подготовке слайдов лекций курса использованы материалы статей и слайды докладов проф. Имонна Кеога, Калифорнийский университет в Риверсайде, США (Eamonn Keogh, University of California Riverside, USA), см. <https://www.cs.ucr.edu/~eamonn/>

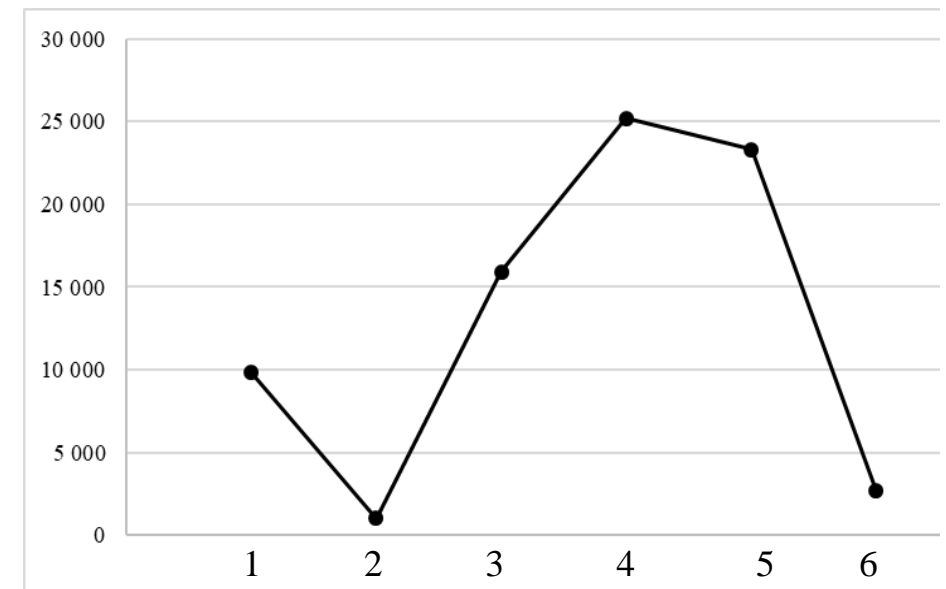
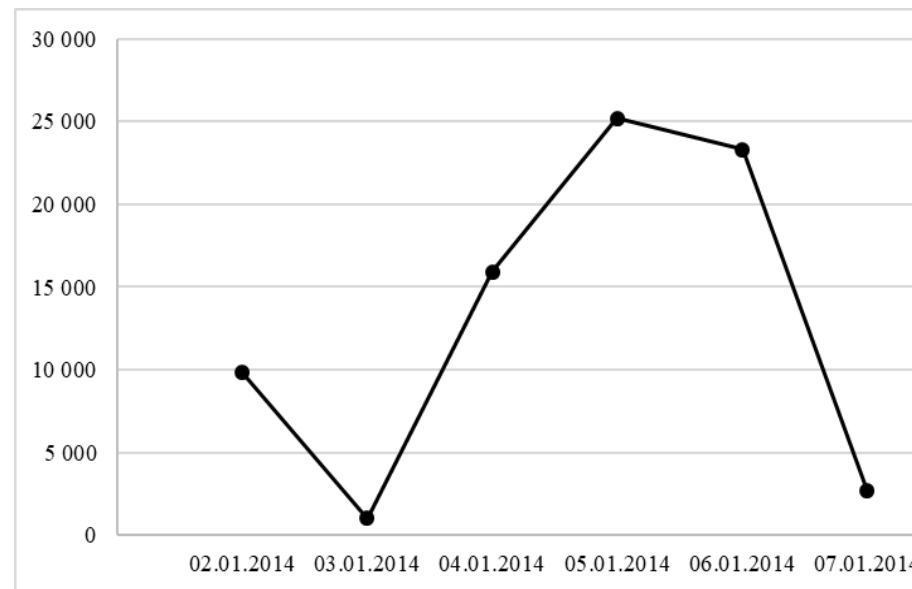
# Содержание

- Понятие временного ряда
- Временные ряды в различных предметных областях
- Основные задачи анализа временных рядов
- Определения и нотация

# Временной ряд – упорядоченная по времени последовательность чисел

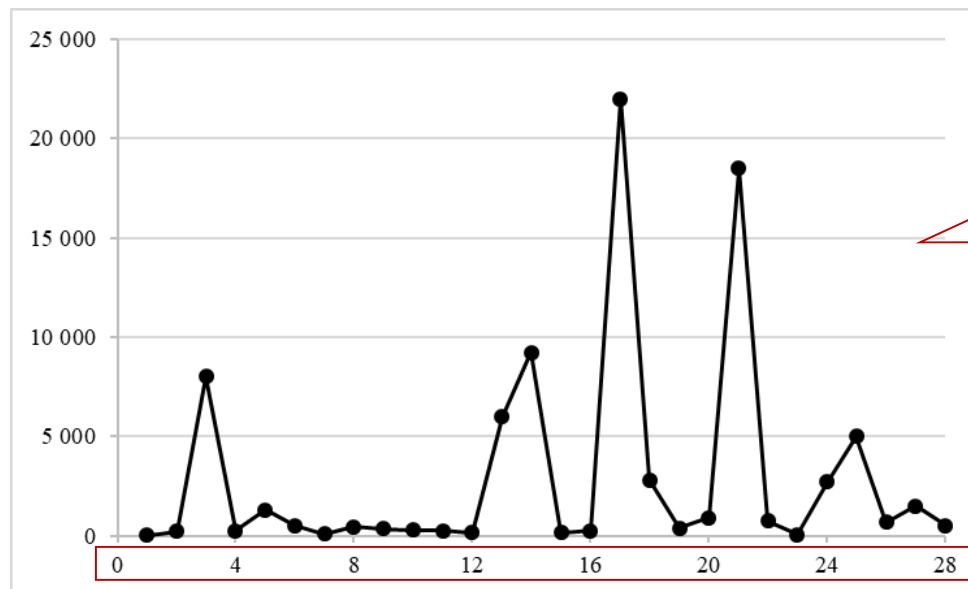
- Точки (элементы) ряда ассоциированы с временными метками, сделанными через **равные промежутки** (т.е. частота измерений фиксирована)
- Значения временных меток могут не подвергаться обработке или отсутствовать в исходных данных

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014	9810
2	03.01.2014	1037
3	04.01.2014	15912
4	05.01.2014	25180
5	06.01.2014	23307
6	07.01.2014	2680



# Важность фиксированной частоты измерений

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014 07:29	30
2	02.01.2014 16:05	230
3	02.01.2014 16:17	8000
4	02.01.2014 18:15	250
5	02.01.2014 19:22	1300
6	03.01.2014 08:27	500
7	03.01.2014 09:18	100
8	03.01.2014 10:58	437
9	04.01.2014 04:22	350
10	04.01.2014 09:58	280
11	04.01.2014 12:44	240
12	04.01.2014 18:25	160
13	04.01.2014 20:26	6000
14	04.01.2014 21:33	9232
15	05.01.2014 06:22	140
16	05.01.2014 14:17	240
17	05.01.2014 14:48	22000
18	05.01.2014 16:11	2800
19	06.01.2014 09:43	377
20	06.01.2014 12:00	910
21	06.01.2014 14:14	18500
22	06.01.2014 15:50	750
23	06.01.2014 16:12	70
24	06.01.2014 21:05	2700
25	07.01.2014 15:33	5000
26	07.01.2014 16:17	680
27	07.01.2014 18:11	1500
28	07.01.2014 22:03	500



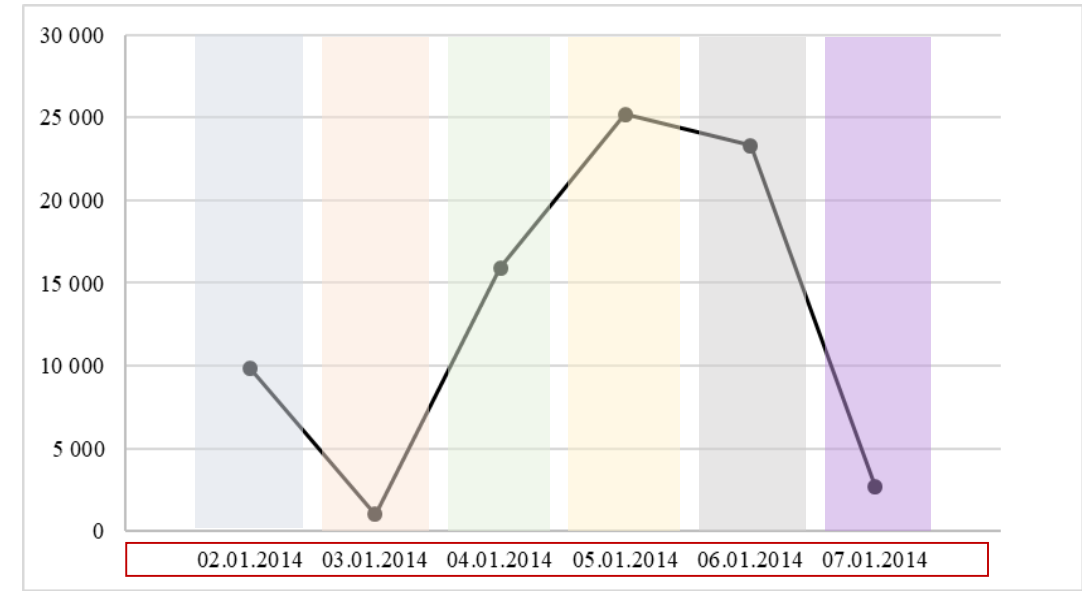
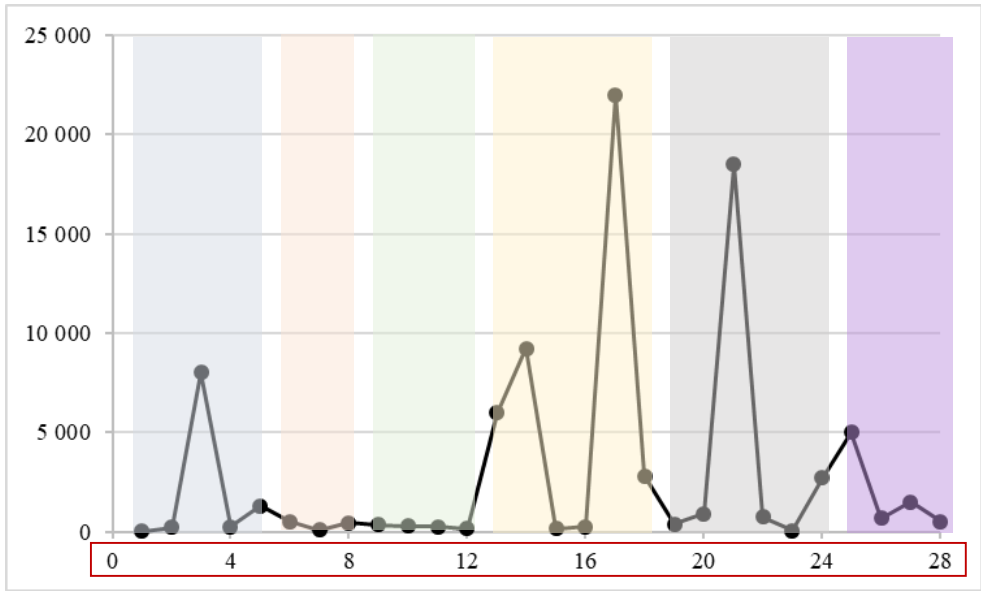
Обработка ряда  
не имеет смысла,  
т.к. измерения сделаны  
через **разные**  
промежутки времени

# Важность фиксированной частоты измерений

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014 07:29	30
2	02.01.2014 16:05	230
3	02.01.2014 16:17	8000
4	02.01.2014 18:15	250
5	02.01.2014 19:22	1300
6	03.01.2014 08:27	500
7	03.01.2014 09:18	100
8	03.01.2014 10:58	437
9	04.01.2014 04:22	350
10	04.01.2014 09:58	280
11	04.01.2014 12:44	240
12	04.01.2014 18:25	160
13	04.01.2014 20:26	6000
14	04.01.2014 21:33	9232
15	05.01.2014 06:22	140
16	05.01.2014 14:17	240
17	05.01.2014 14:48	22000
18	05.01.2014 16:11	2800
19	06.01.2014 09:43	377
20	06.01.2014 12:00	910
21	06.01.2014 14:14	18500
22	06.01.2014 15:50	750
23	06.01.2014 16:12	70
24	06.01.2014 21:05	2700
25	07.01.2014 15:33	5000
26	07.01.2014 16:17	680
27	07.01.2014 18:11	1500
28	07.01.2014 22:03	500

Агрегация с помощью суммирования

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014	9810
2	03.01.2014	1037
3	04.01.2014	15912
4	05.01.2014	25180
5	06.01.2014	23307
6	07.01.2014	2680

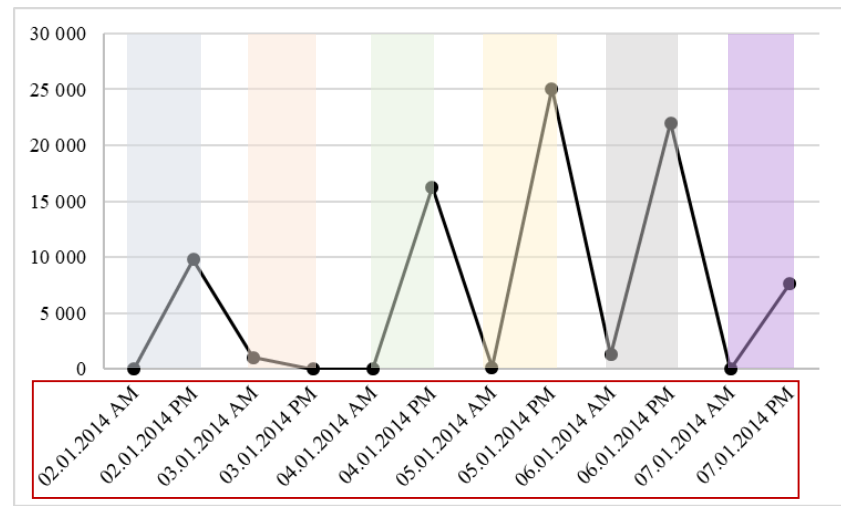
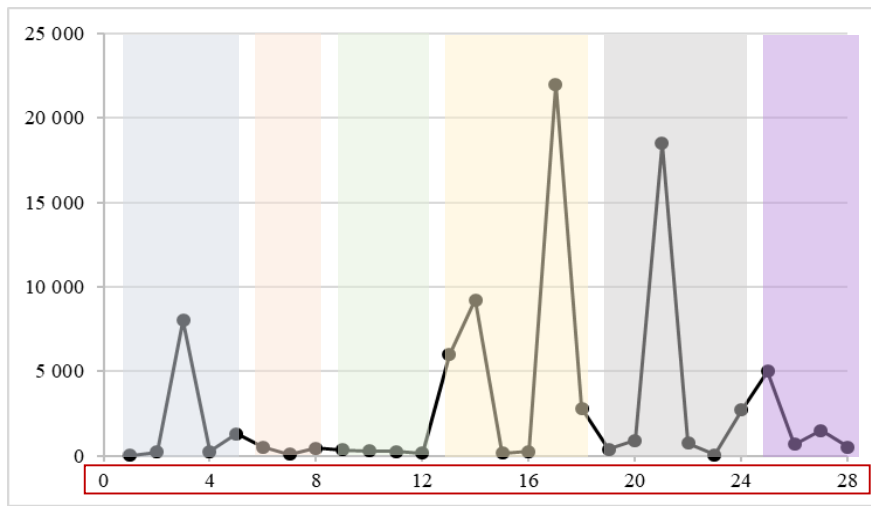


# Важность фиксированной частоты измерений

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014 07:29	30
2	02.01.2014 16:05	230
3	02.01.2014 16:17	8000
4	02.01.2014 18:15	250
5	02.01.2014 19:22	1300
6	03.01.2014 08:27	500
7	03.01.2014 09:18	100
8	03.01.2014 10:58	437
9	04.01.2014 04:22	350
10	04.01.2014 09:58	280
11	04.01.2014 12:44	240
12	04.01.2014 18:25	160
13	04.01.2014 20:26	6000
14	04.01.2014 21:33	9232
15	05.01.2014 06:22	140
16	05.01.2014 14:17	240
17	05.01.2014 14:48	22000
18	05.01.2014 16:11	2800
19	06.01.2014 09:43	377
20	06.01.2014 12:00	910
21	06.01.2014 14:14	18500
22	06.01.2014 15:50	750
23	06.01.2014 16:12	70
24	06.01.2014 21:05	2700
25	07.01.2014 15:33	5000
26	07.01.2014 16:17	680
27	07.01.2014 18:11	1500
28	07.01.2014 22:03	500

Агрегация с помощью суммирования

№	Отметка времени	Значение
1	02.01.2014 AM	30
2	02.01.2014 PM	9780
3	03.01.2014 AM	1037
4	03.01.2014 PM	0
5	04.01.2014 AM	0
6	04.01.2014 PM	16262
7	05.01.2014 AM	140
8	05.01.2014 PM	25040
9	06.01.2014 AM	1287
10	06.01.2014 PM	22020
11	07.01.2014 AM	0
12	07.01.2014 PM	7680

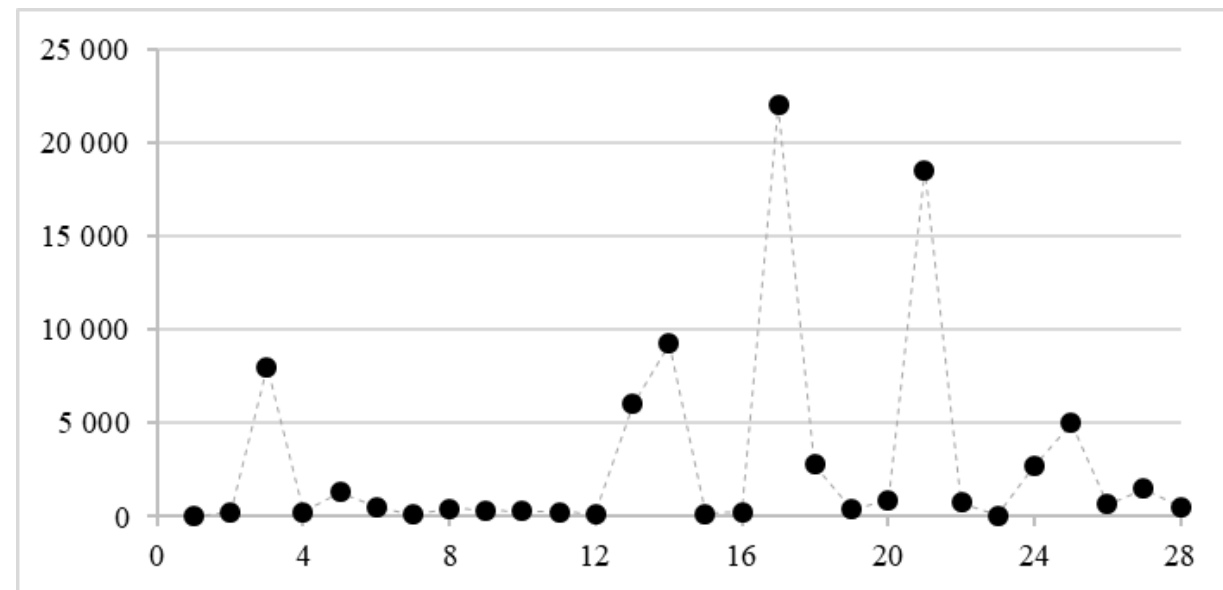


# Временной ряд $\neq$ сигнал

## Временной ряд

$$T = (t_1, \dots, t_n)$$

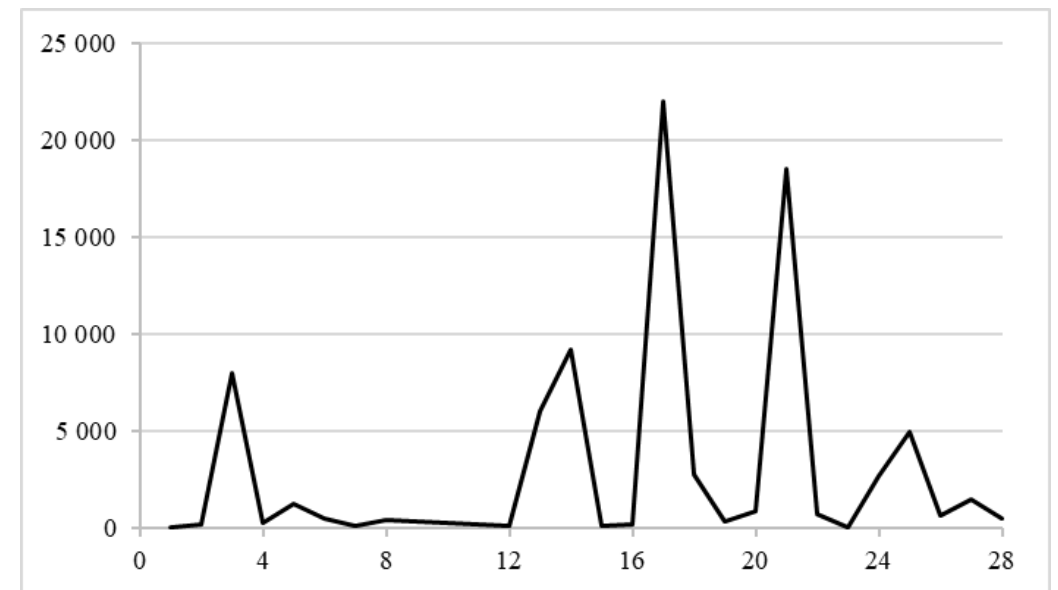
$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n: \exists t_i \in \mathbb{R}$$



## Сигнал (функция)

$$T: \text{dom } T \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall t \in \text{dom } T: \exists T(t) \in \mathbb{R}$$



# Содержание

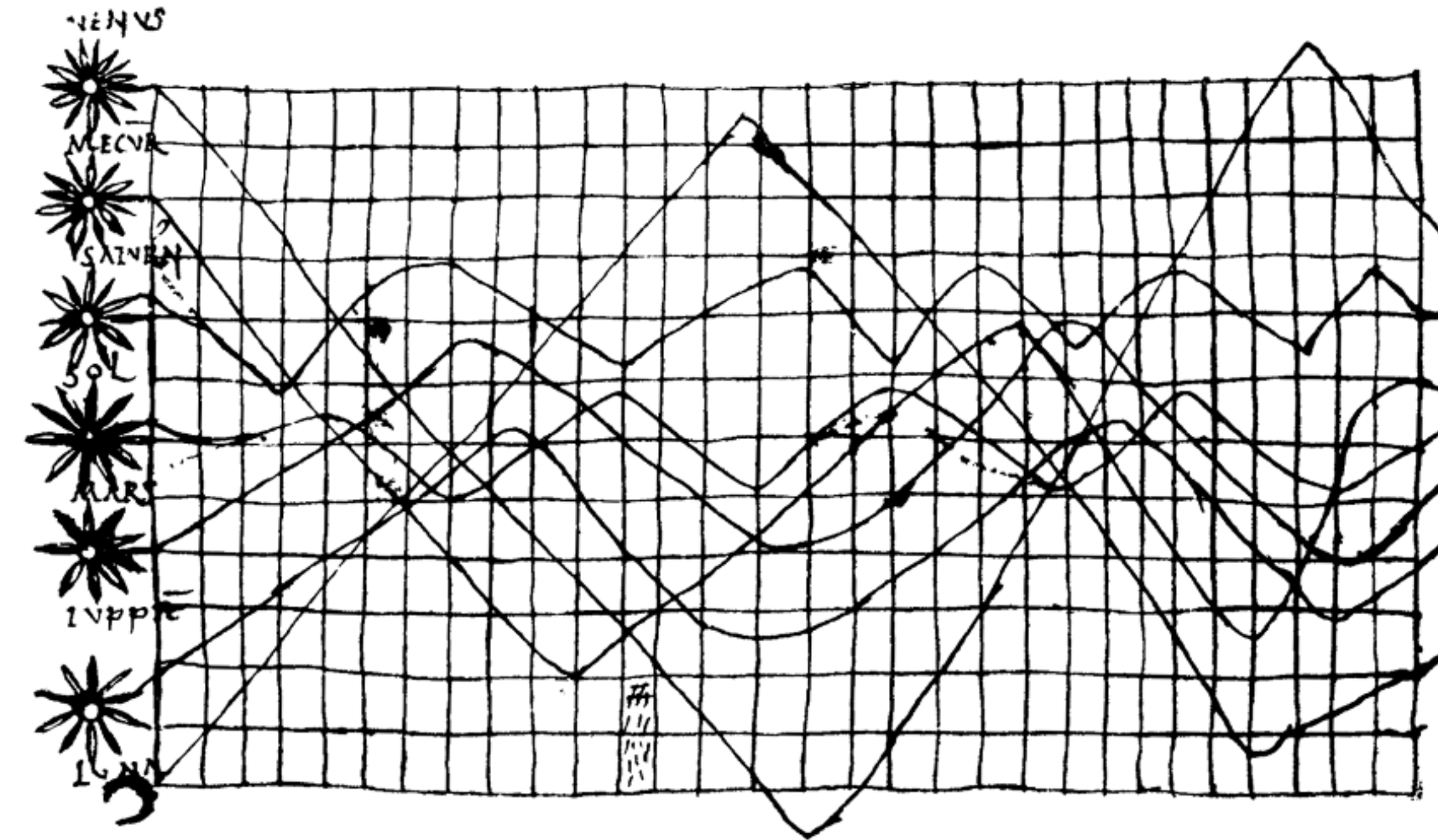
- Понятие временного ряда
- **Временные ряды в различных предметных областях**
- Основные задачи анализа временных рядов
- Определения и нотация



# Люди измеряют всевозможные вещи, изменяющиеся во времени

- ЭКГ, пульс, давление, калории
- Рождаемость и смертность
- Температура и влажность воздуха
- Расход электричества и воды
- Рейтинг популярности политиков
- Спортивная статистика
- Клики веб-страниц
- Курсы валют и акций
- ВВП и госдолг
- ...

# Временные ряды всегда...



Временные ряды, показывающие наклоны планетных орбит, X в. (возможно, наиболее старое изображение временных рядов)

Tufte E. The Visual Display of Quantitative Information. Graphics Press, 2001. 200 p.

# Временные ряды везде...

## Индекс блина к Масленице

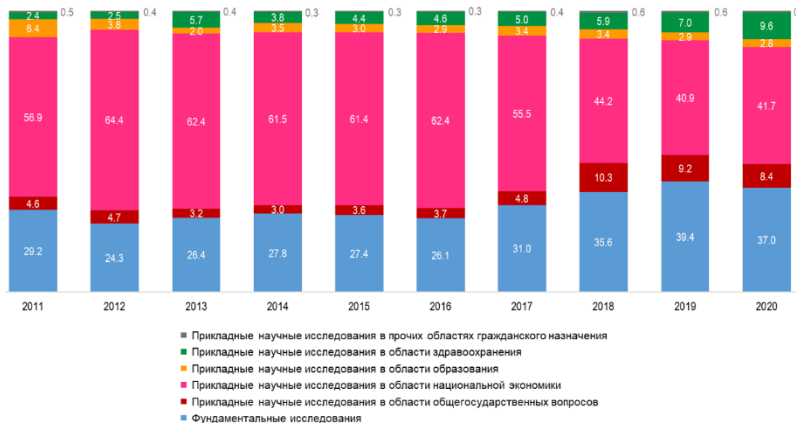
Как за 2 года поменялась цена на ингредиенты для блинов в Челябинской области



# Случайная выборка из 4000 изображений в 15 газетах из различных стран за 1974–1989 гг.: более 75% изображений – это временные ряды

Tufte E. The Visual Display of Quantitative Information. Graphics Press, 2001. 200 p.

с. 1. Структура ассигнований на гражданскую науку из средств федерального бюджета по подразделам классификации расходов бюджетов: 2011–2020 (%)



## Заболееваемость COVID-19 в Челябинской области

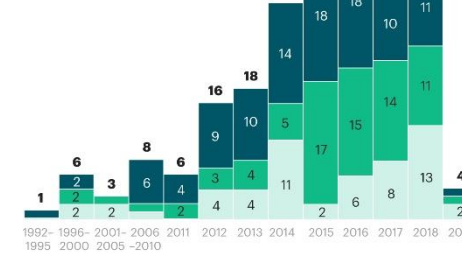
Сколько человек заразилось и умерло с 4 октября по 3 ноября 2021 г.



## Статистика уголовных дел в отношении высокопоставленных чиновников

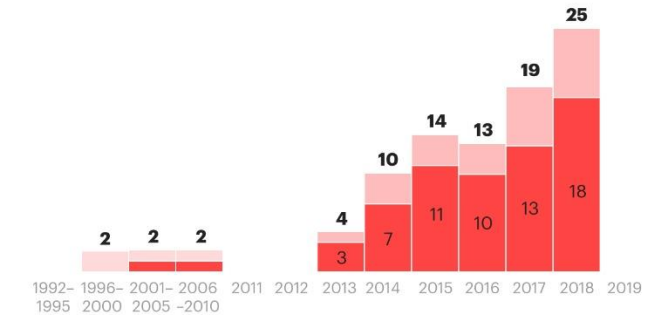
### Уголовные дела

- Главы крупных муниципалитетов
- Высокопоставленные региональные чиновники
- Федеральные чиновники депутаты



## Вынесено приговоров с лишением свободы

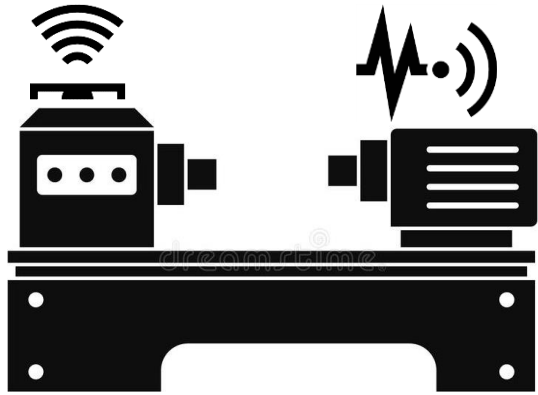
● В том числе сроком свыше 5 лет



Источник: данные консалтинговой компании «НЭО Центр»

© ФБК, 2019

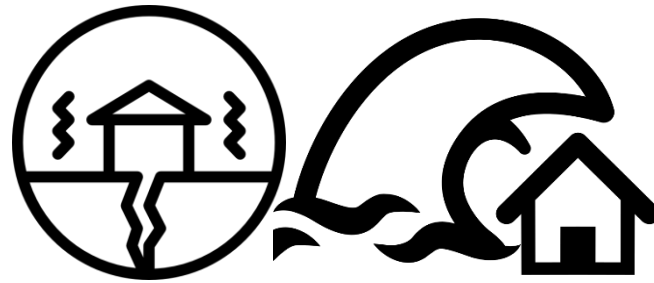
# Временные ряды всюду...



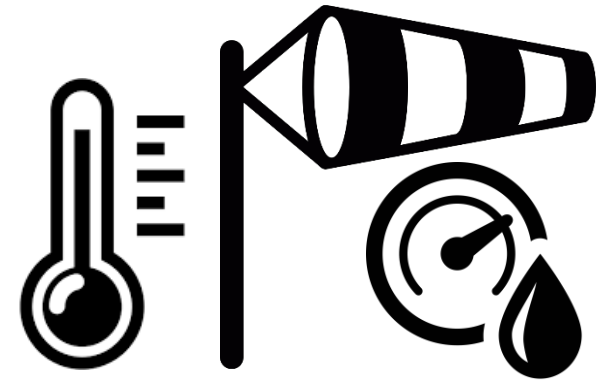
Умное производство,  
предиктивное ТО



Интернет  
вещей



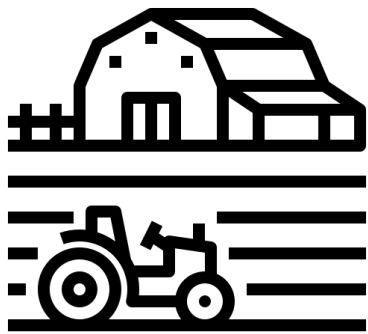
Предсказание  
природных катаклизмов



Прогноз погоды,  
моделирование климата



Персональная  
медицина



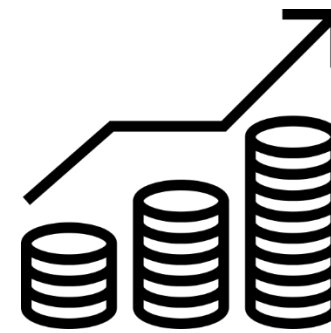
Сельское хоз-во,  
животноводство



Борьба  
с преступностью



Био- и хемо-  
информатика

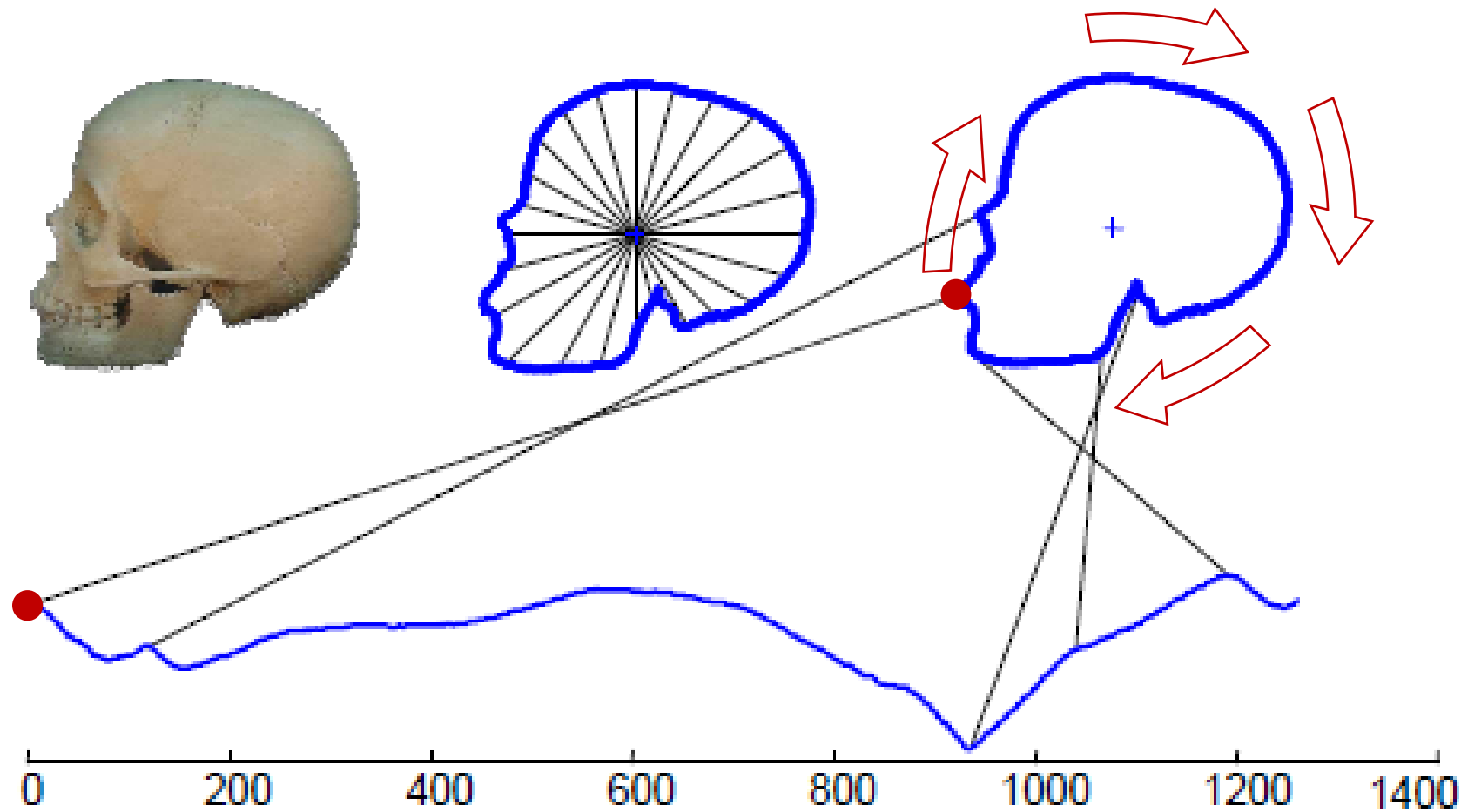


Экономика, бизнес,  
финансы



Системы  
электронного обучения

# Временной ряд из изображения



Keogh E. *et al.* LB\_Keogh supports exact indexing of shapes under rotation invariance with arbitrary representations and distance measures. VLDB 2006. pp. 882-893. [URL](#)

# Временной ряд из видео

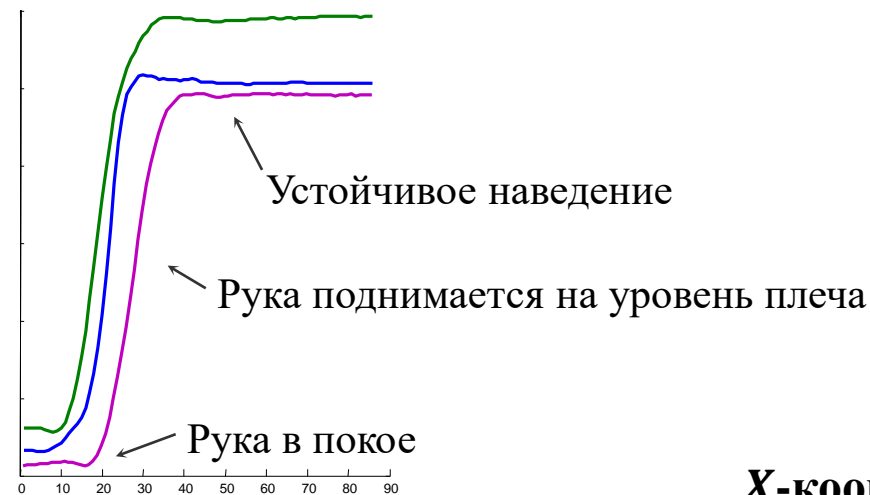
Классификация  
“Gun/No gun”



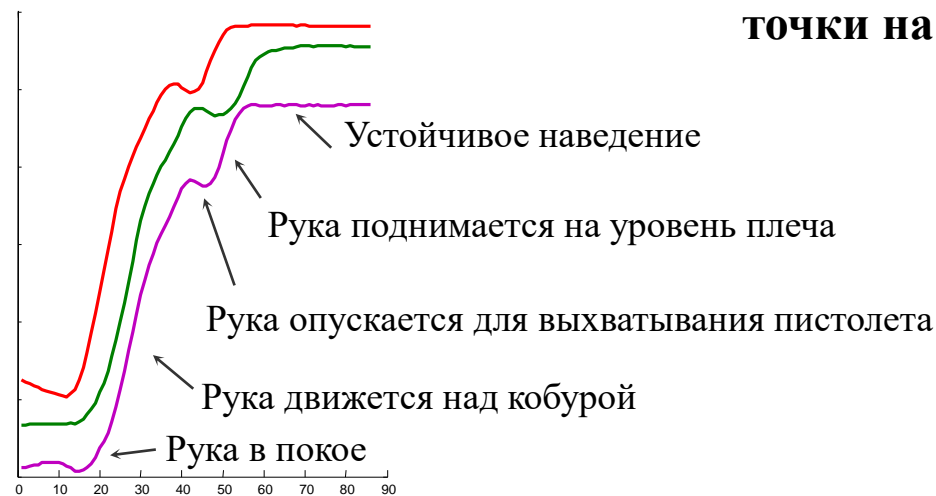
Указание  
рукой



Вытаскивание  
пистолета

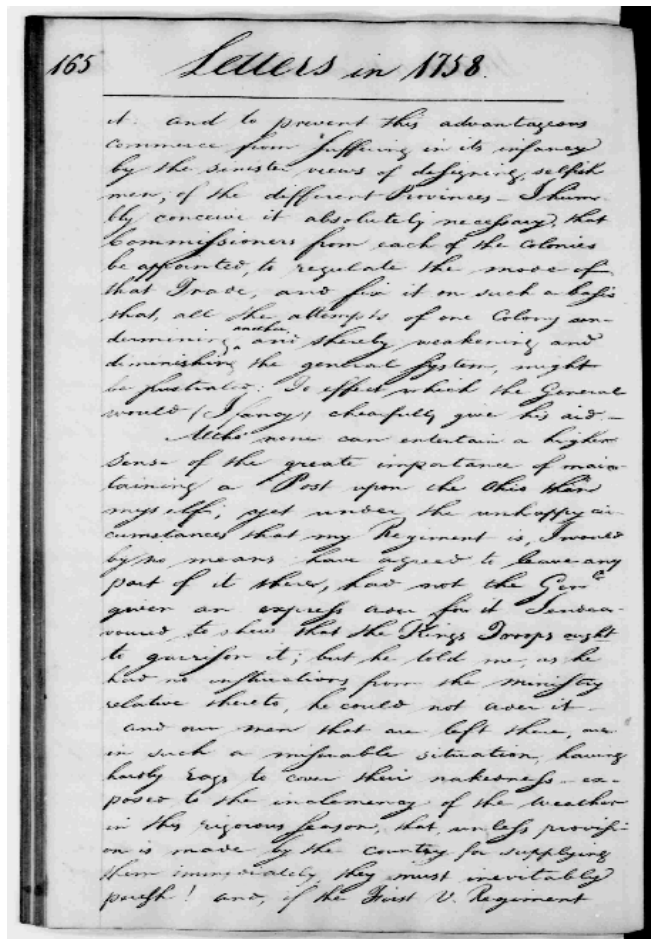


X-координата  
точки на руке



Keogh E. *et al.* A novel technique for indexing video surveillance data. First ACM SIGMM Int. workshop on Video surveillance. 2003. P. 98-106. <https://doi.org/10.1145/982452.982465>

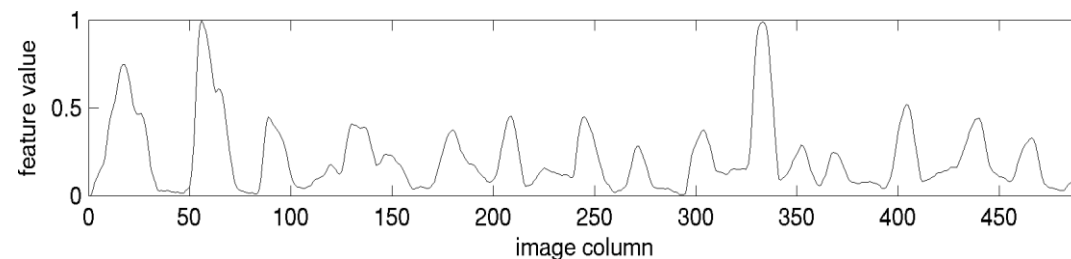
# Временной ряд из рукописного текста



George Washington manuscript

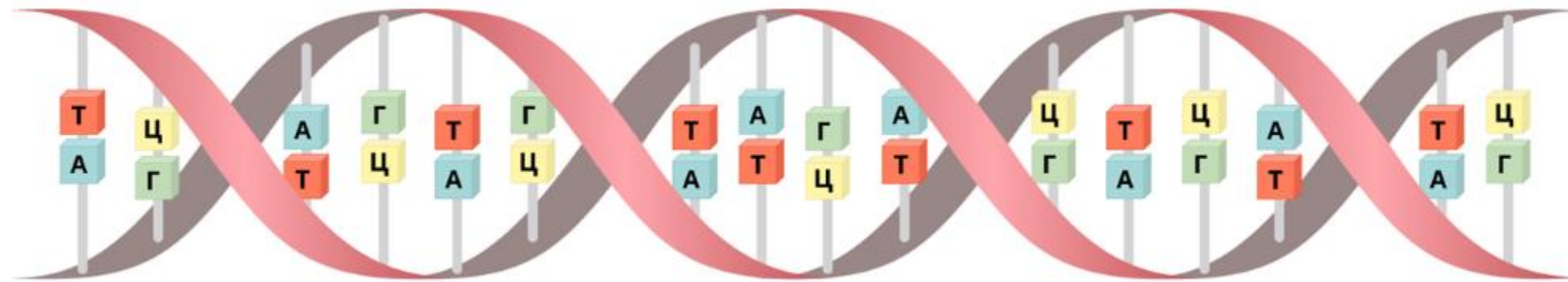


George Washington  
1732-1799



# ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота ) как временной ряд

- ДНК – макромолекула, обеспечивающая хранение, передачу через поколения и реализацию генетической программы развития и функционирования организмов

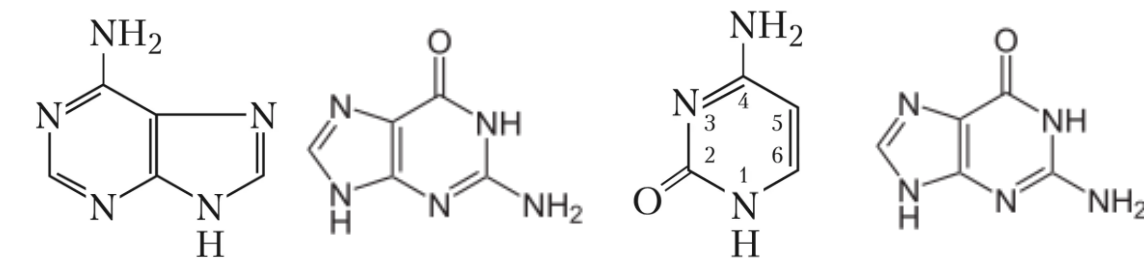


Трансформация ДНК  
во временной ряд

```

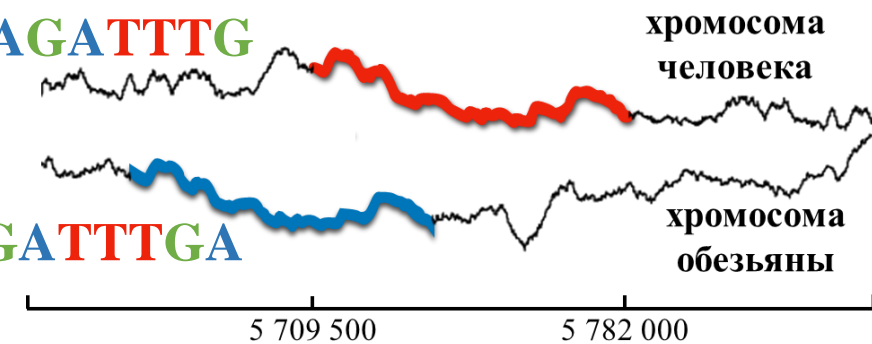
t1 := 0
for i ∈ 1..|DNAstr| do
case DNAstr of
A : ti+1 := ti+2
G : ti+1 := ti+1
C : ti+1 := ti-1
T : ti+1 := ti-2
end
    
```

A (Adenine)    T (Thymine)    Ц (Cytosine)    Г (Guanine)



GTCAAT...AAGAGATTG

GGCAAT...ACAGATTGA





# Содержание

- Понятие временного ряда
- Временные ряды в различных предметных областях
- **Основные задачи анализа временных рядов**
- Определения и нотация

# Почему временные ряды анализировать сложнее, чем другие данные

- Большая длина
- Субъективность схожести рядов (подпоследовательностей)
- Пропущенные значения
- Различные форматы данных и частоты снятия показаний, шумы  
(не рассматривается в рамках курса)

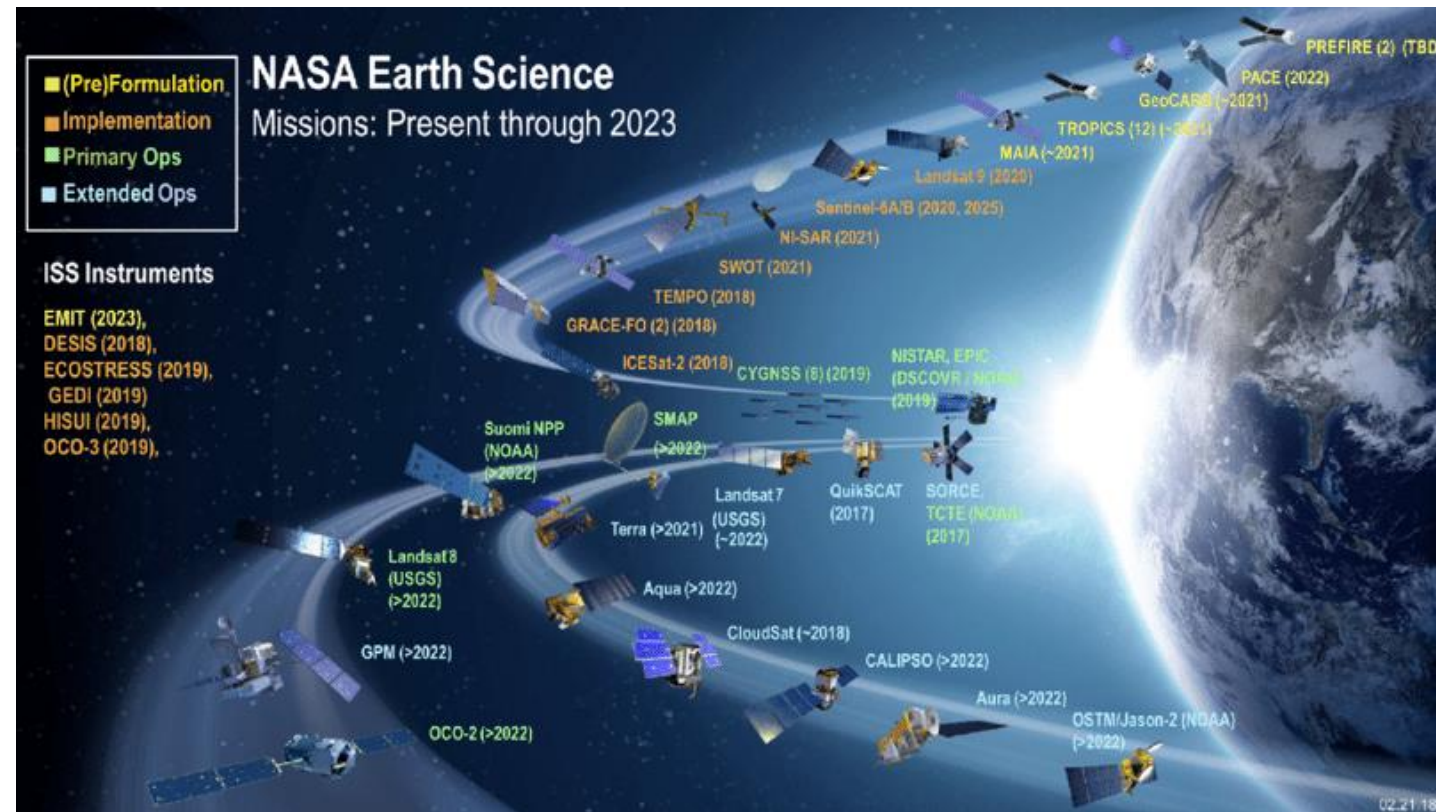
# Большие временные ряды: AEMO Solar



Оборудование AEMO (Australian Energy Market Operator) регистрирует выработку солнечной энергии (МВт) в Австралии с 2019 г. каждые 4 с

<https://zenodo.org/record/4656027>

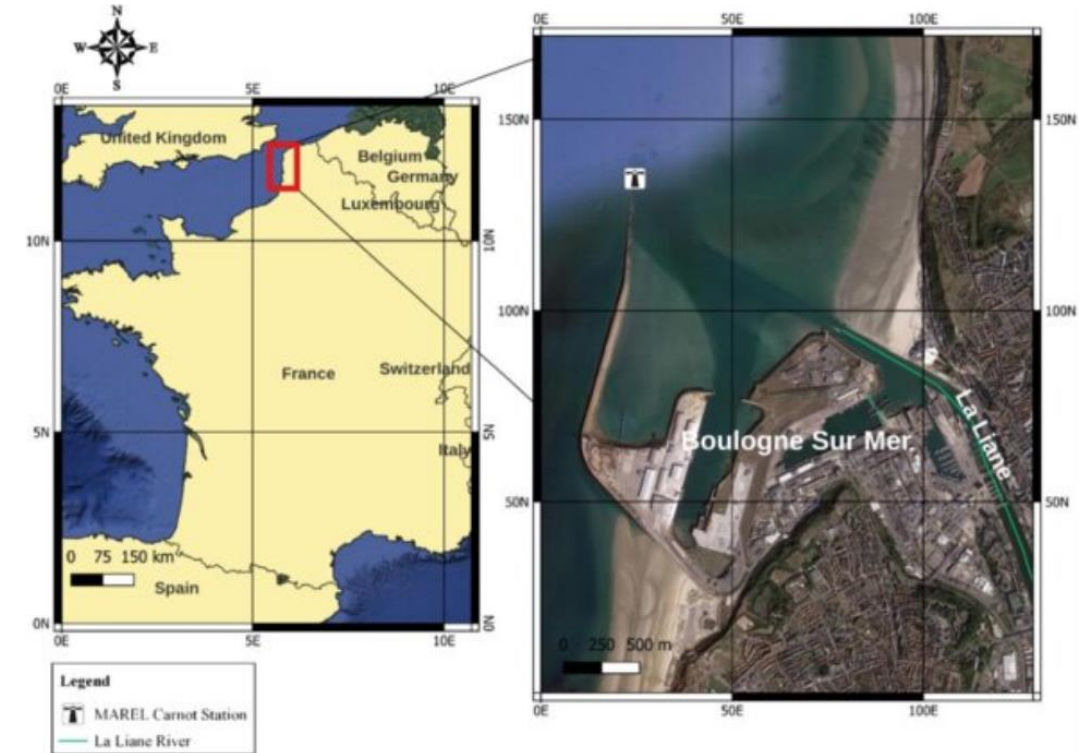
# Большие временные ряды: Earth Observations Database



Размер **NASA Space Shuttle Earth Observations Database** – 40 Пб\* (2020 г.), ожидаемый далее ежегодный прирост 50 Пб \* 1 Петабайт= $10^{15}$  (квадриллион) байт,  $10^{15} \approx$  к-во синапсов в головном мозге человека

<https://www.nasa.gov/feature/goddard/2020/nasa-funds-projects-to-make-geosciences-data-more-accessible>

# Большие временные ряды: MAREL Carnot



Океанографическая станция **MAREL Carnot** с 2004 г. регистрирует каждые 20 мин. более чем 15 химических и биологических характеристик воды в проливе Ла-Манш

Ben Ismail D.K. *et al.* Statistical properties and time-frequency analysis of temperature, salinity and turbidity measured by the MAREL Carnot station in the coastal waters of Boulogne-sur-Mer (France). *Journal of Marine Systems*. 2016. Vol. 162. P. 137-153. <https://doi.org/10.1016/j.jmarsys.2016.03.010>

# Большие временные ряды: DEBS Challenge



Набор данных **DEBS challenge**: сенсоры пространственного позиционирования закреплены на бутсах игроков и перчатках вратаря (200 Гц), а также на мяче (2000 Гц), всего 15К событий в секунду

Mutschler C. *et al.* The DEBS 2013 grand challenge. DEBS'13: Proc. of the 7th ACM international conference on Distributed event-based systems. 2013. P. 289–294.  
<https://doi.org/10.1145/2488222.2488283>

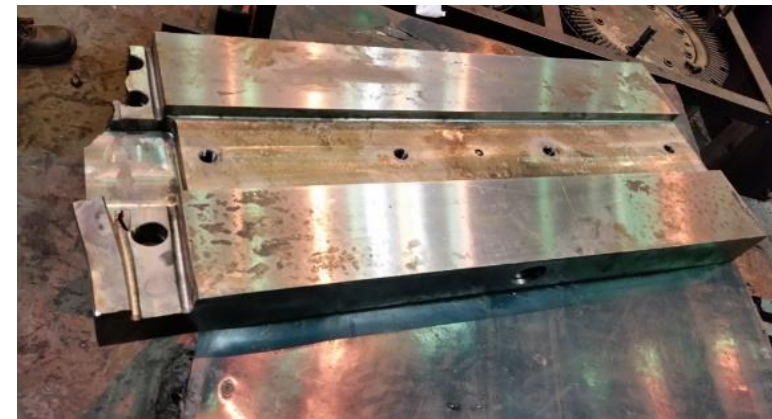
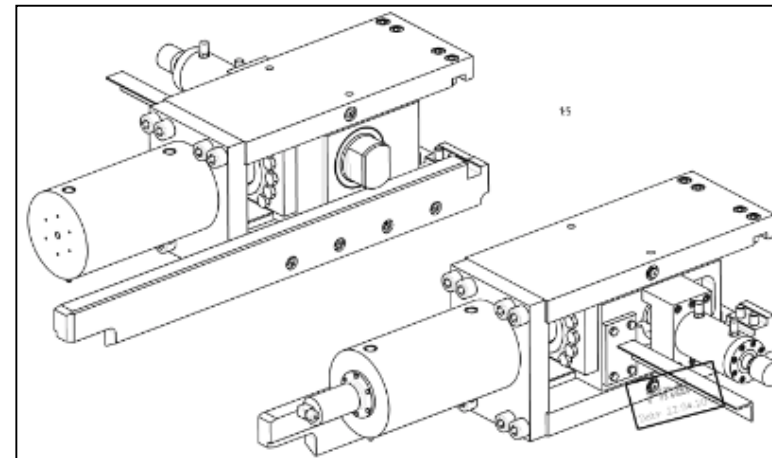
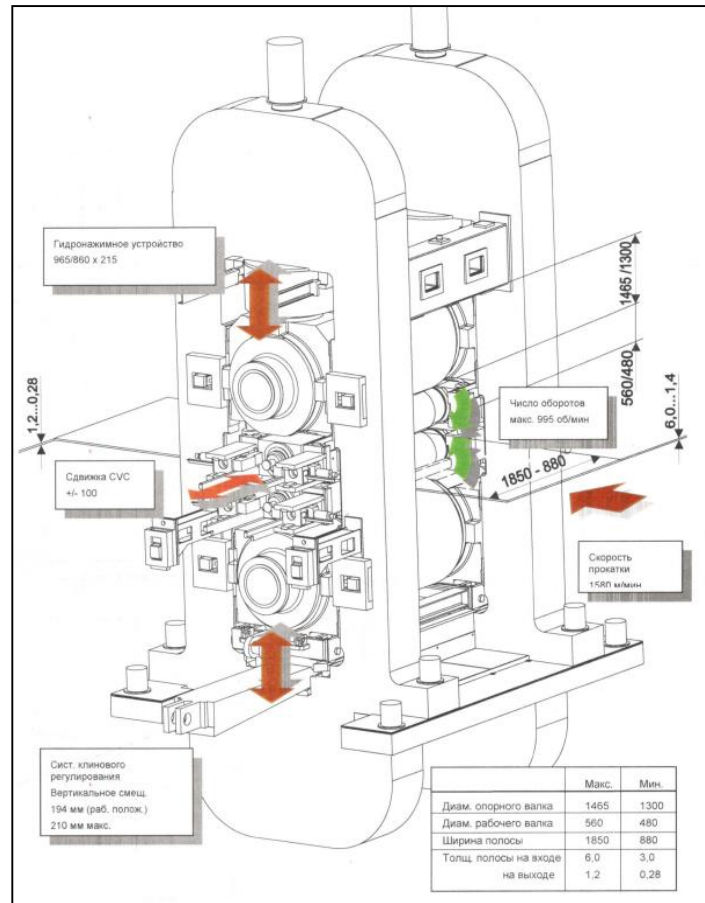
# Большие временные ряды: Madrid VAR

**Система контроля дорожного движения в Мадриде** насчитывает более 3500 автоматических регистраторов транспортных средств (VAR, Vehicle Automatic Registrar), выдающих показания каждые 15 мин., начиная с 2014 г.



Laña I. *et al.* On the imputation of missing data for road traffic forecasting: New insights and novel techniques. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2018. Vol. 90. pp. 18-33. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.02.021>

# Большие временные ряды: CVC MMK



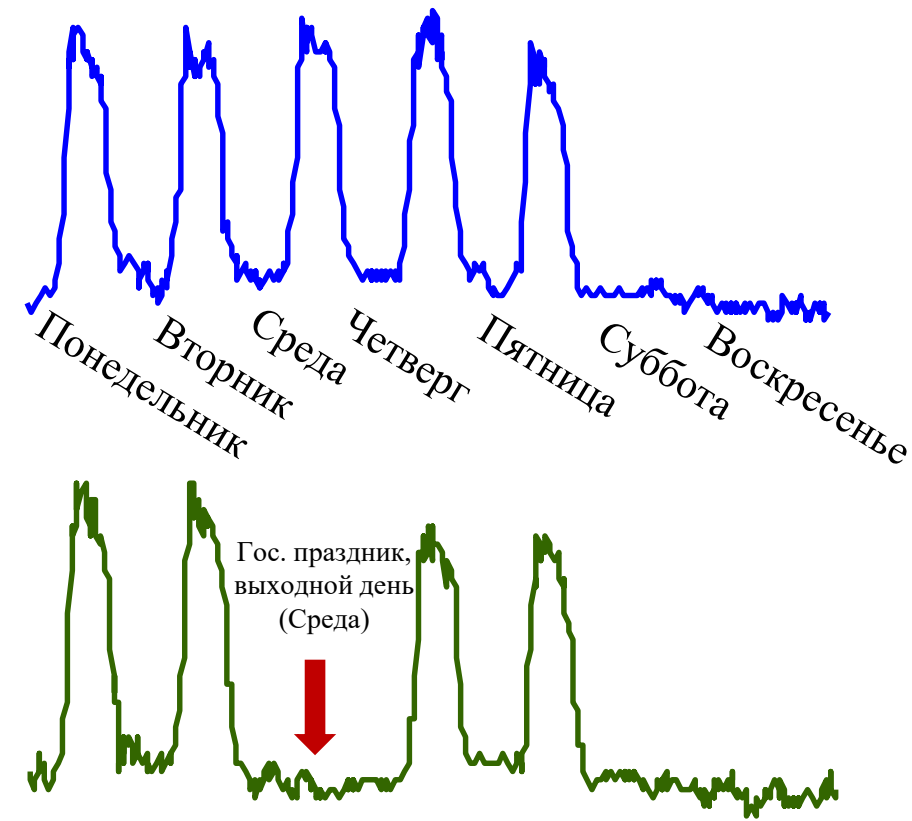
**CVC-система стана холодной прокатки Магнитогорского металлургического комбината насчитывает более 100 датчиков с частотой 1 Гц.**

Краева Я.А. Поиск аномалий в сенсорных данных цифровой индустрии с помощью параллельных вычислений. Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12, № 2. С. 47–61. <https://doi.org/10.14529/cmse230202>



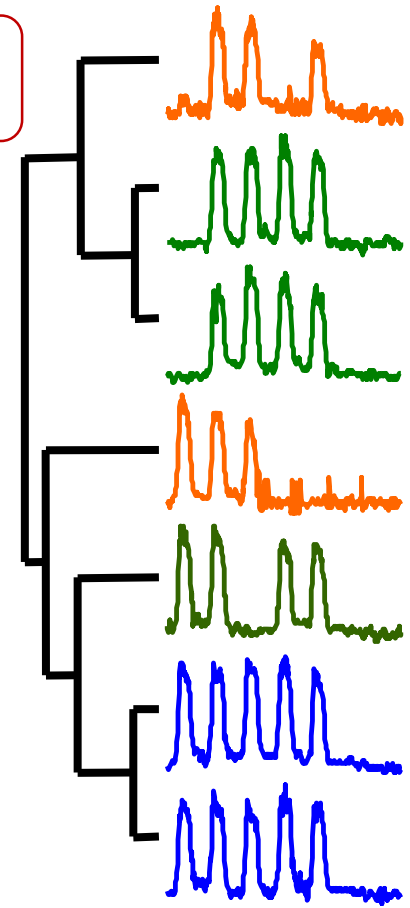
# Схожесть рядов определяется задачей и предметной областью

Недельное энергопотребление вычислительного центра (Голландия, 1997)\*



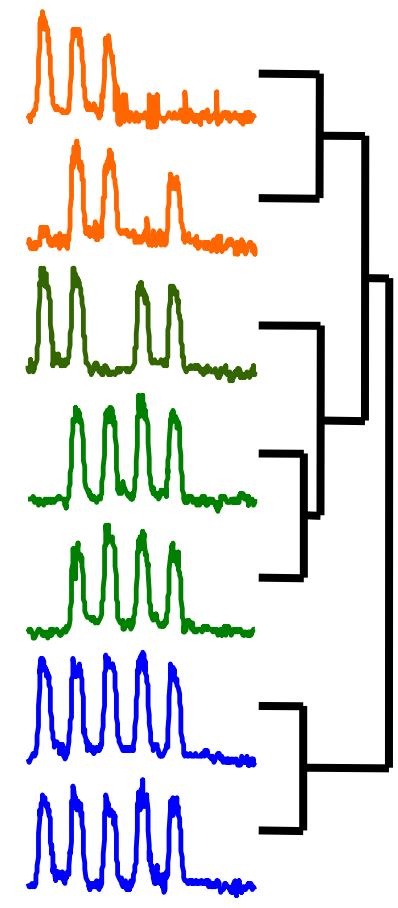
Евклидово расстояние

Время построения 1 с



Dynamic Time Warping

Время построения 3 час

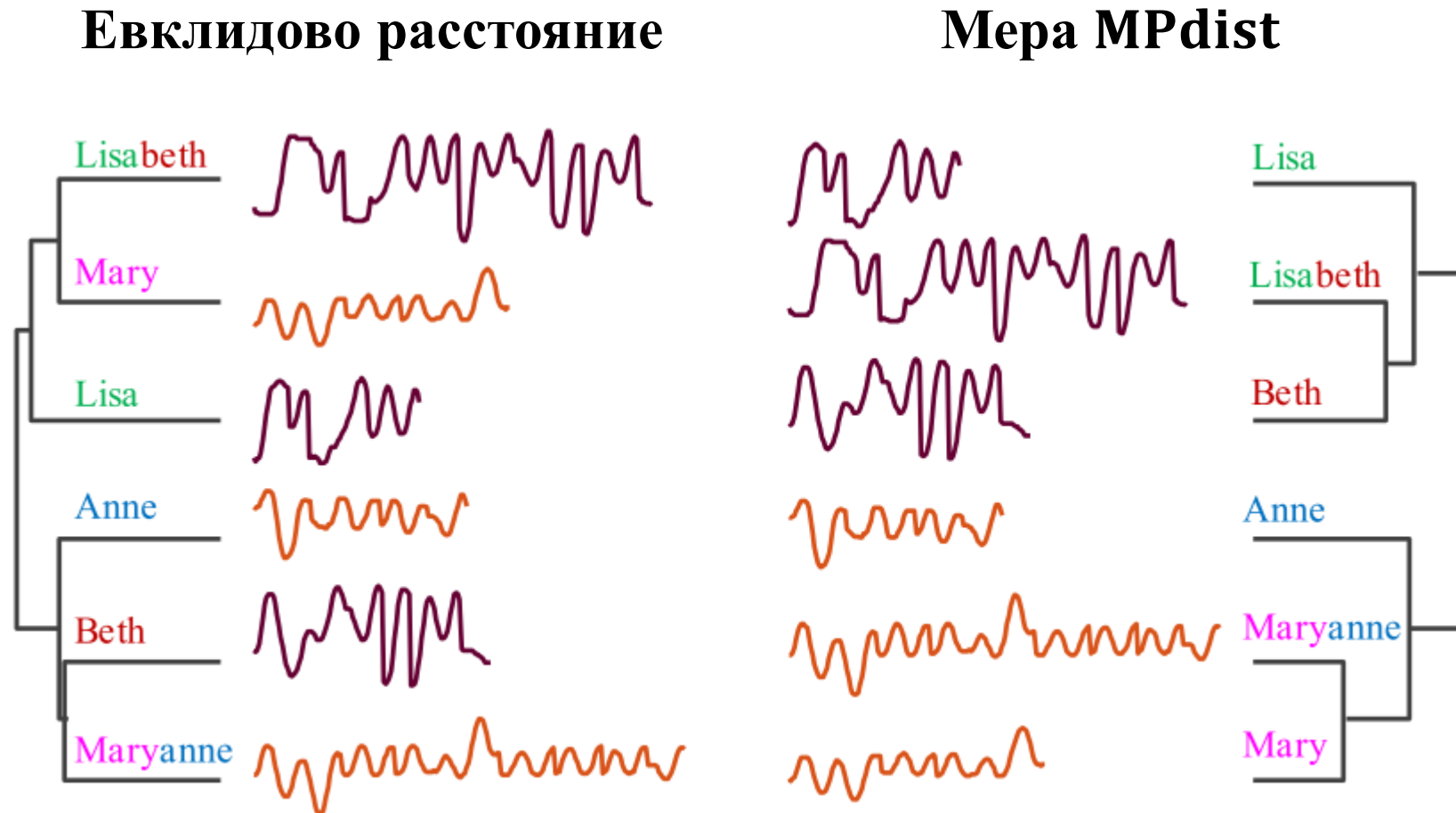


Количество рабочих дней в неделе:

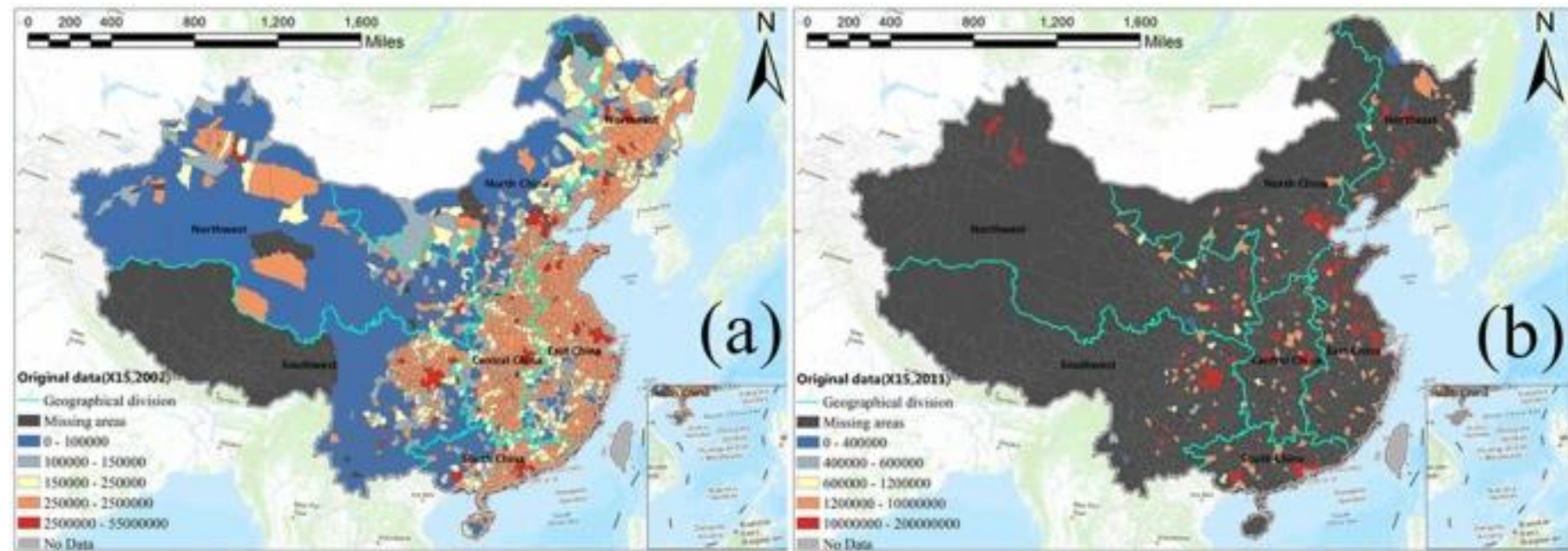


\* van Wijk J.J., van Selow R.R. Cluster and calendar based visualization of time series data. INFOVIS 1999: 4-9. DOI: [10.1109/INFOVIS.1999.801851](https://doi.org/10.1109/INFOVIS.1999.801851)

# Схожесть рядов определяется задачей и предметной областью



# Пропущенные значения в временных рядах



Доля провинций Китая, не предоставившие данные *по одному атрибуту* для гос. стат. отчета\*

a) 2002: менее 15%

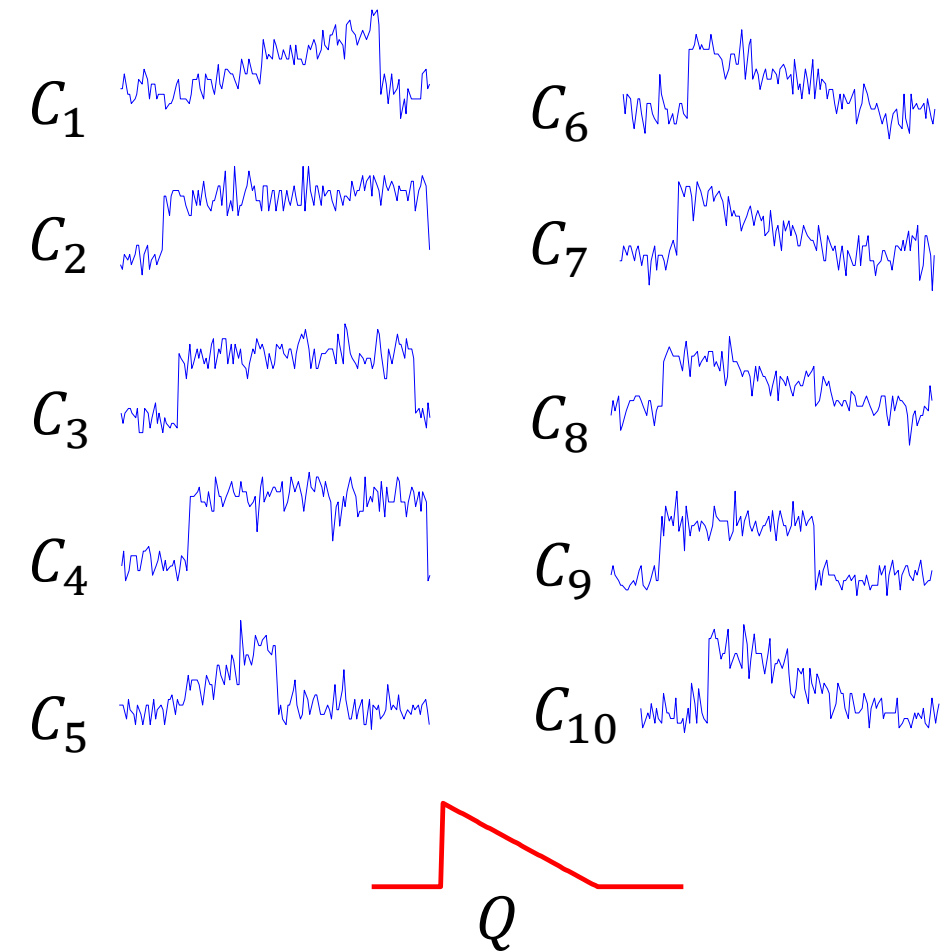
b) 2011: более 85%

\* Song C. *et al.* Estimating missing values in China's official socioeconomic statistics using progressive spatiotemporal Bayesian hierarchical modeling. Sci. Rep. 2018. Vol. 8, article 10055. DOI: [10.1038/s41598-018-28322-z](https://doi.org/10.1038/s41598-018-28322-z)

# Базовые задачи анализа временных рядов

- Поиск по образцу
- Поиск аномалий
- Поиск шаблонов
- Восстановление пропущенных значений
- Прогноз
- Классификация
- Кластеризация

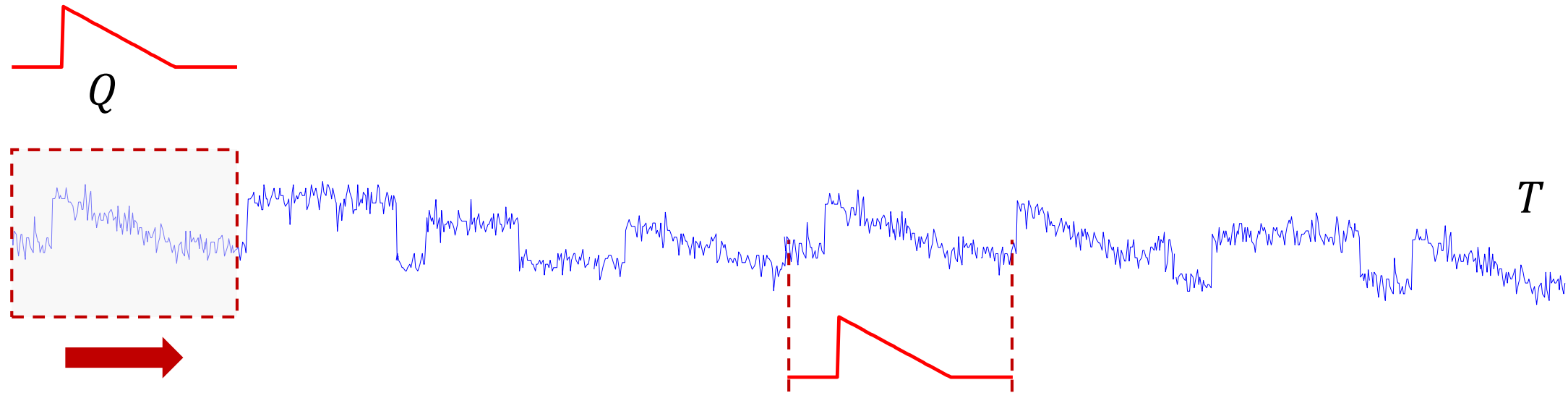
# Поиск по образцу: случай нескольких временных рядов (whole matching)



В заданном множестве рядов  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  найти ряд  $C_{\text{bestmatch}}$ , наиболее похожий на заданный запрос  $Q$ :

$$\forall C_i \in C \quad \text{Dist}(C_{\text{bestmatch}}, Q) \leq \text{Dist}(C, Q)$$

# Поиск по образцу: случай подпоследовательностей временного ряда (subsequence matching)



В заданном ряде  $T = \{C_1, \dots, C_n\}$  найти подпоследовательность  $C_{\text{bestmatch}}$ , наиболее похожую на заданный запрос  $Q$ :

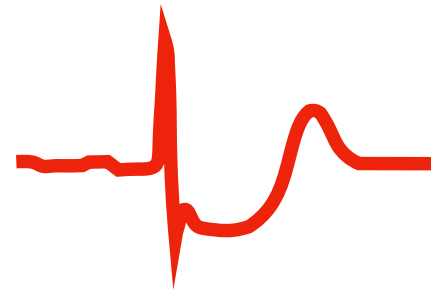
$$\forall T_{i,m} \in S_T^m \quad \text{Dist}(C_{\text{bestmatch}}, Q) \leq \text{Dist}(C, Q)$$

# Поиск по образцу: выявление заболеваний по ЭКГ

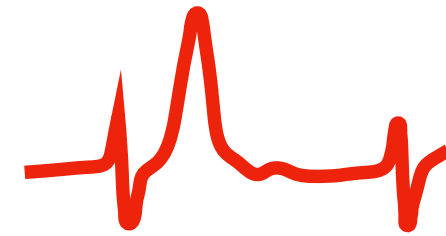
Преждевременное  
сокращение желудочков



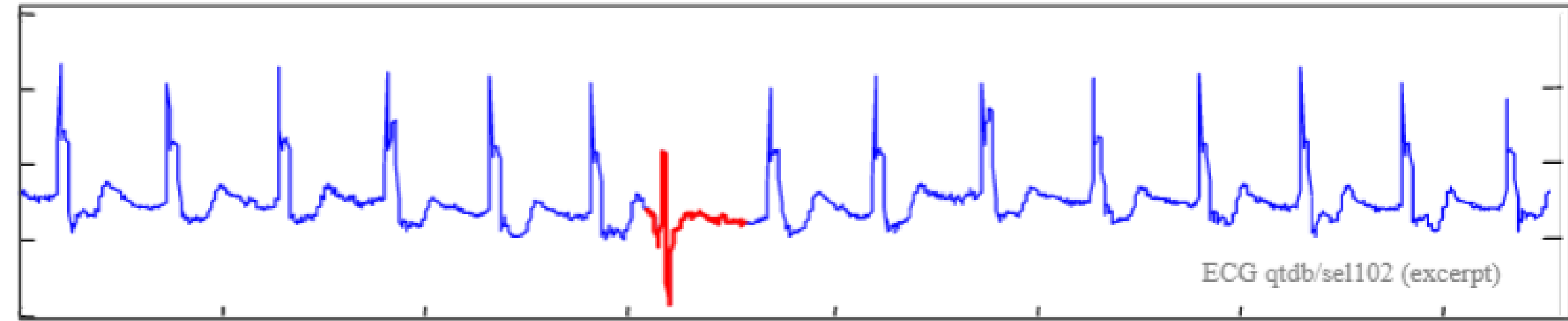
Инфаркт



Гиперкалиемия



# Поиск аномалий временного ряда

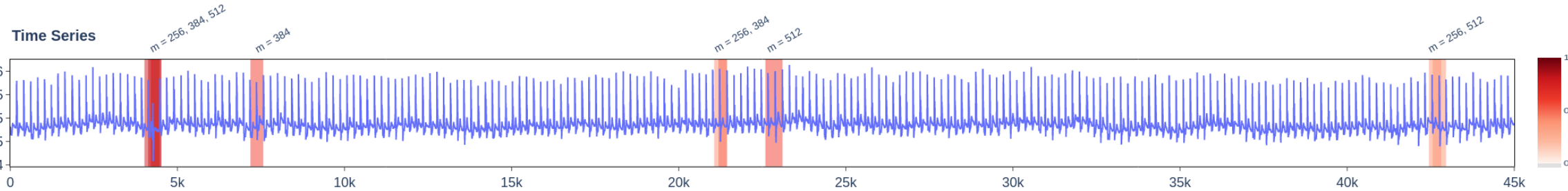


В заданном временном ряде найти подпоследовательность, наиболее непохожую на все остальные подпоследовательности ряда



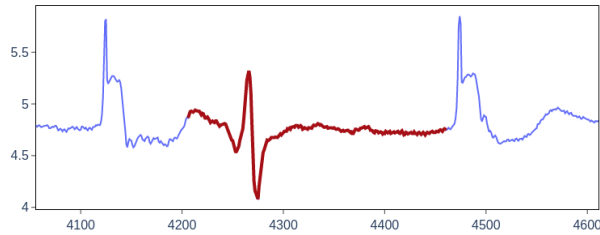
# Поиск аномалий

ЭКГ  
взрослого  
пациента



Прежде-  
временное  
сокращение  
желудочков

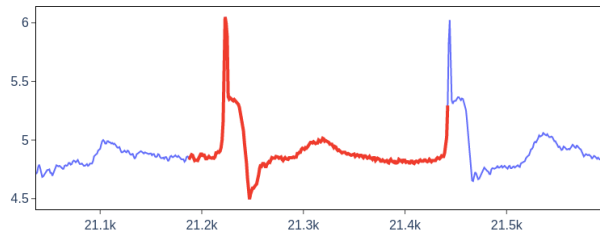
top-1



Эктопическое  
сердцебиение

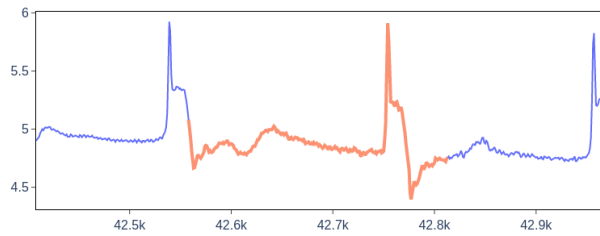
top-2

длина 256

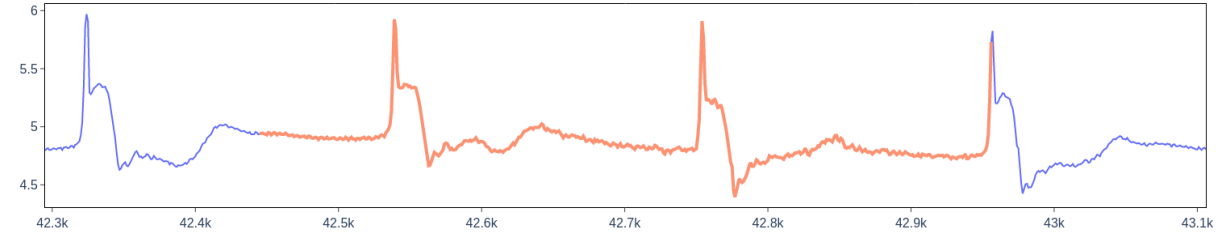
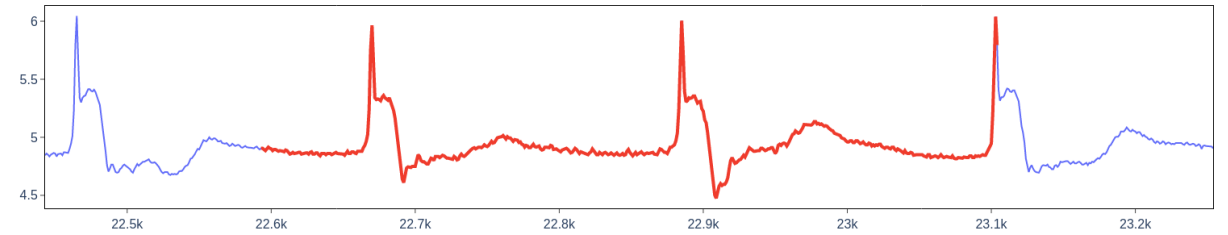
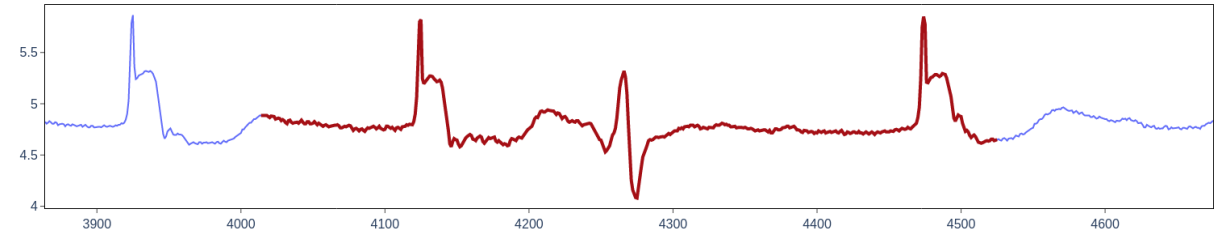


Эктопическое  
сердцебиение

top-3

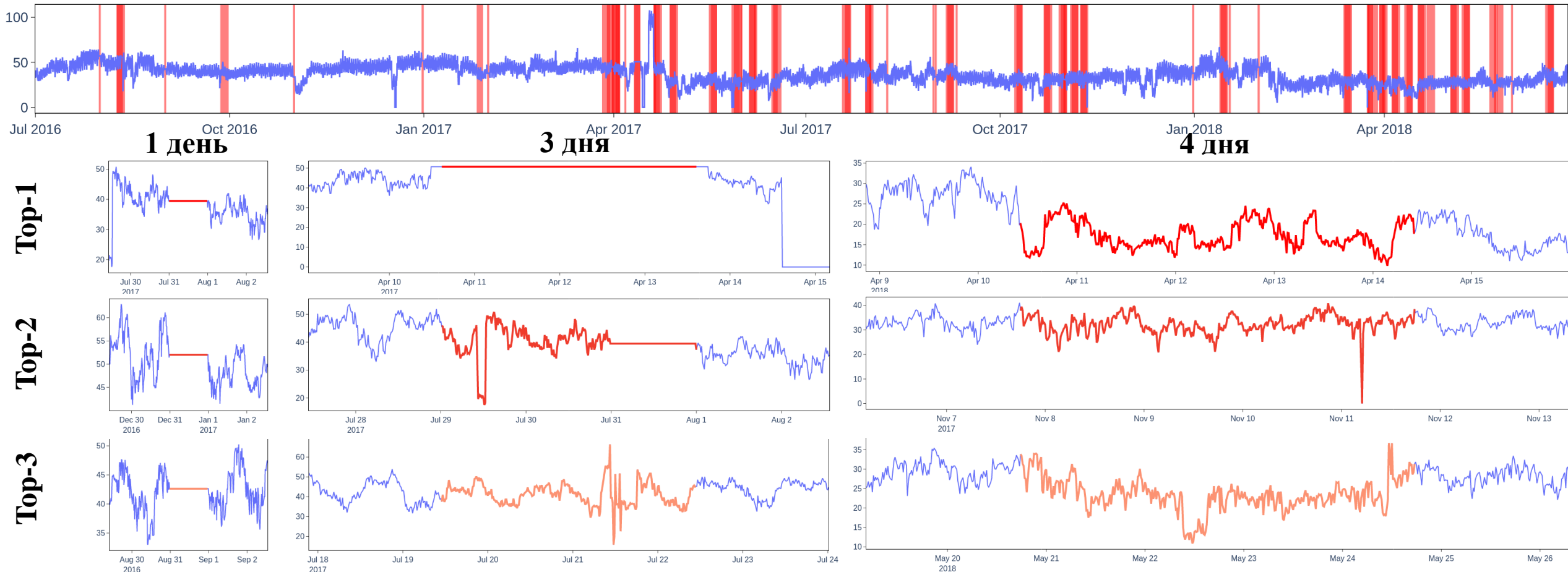


длина 512



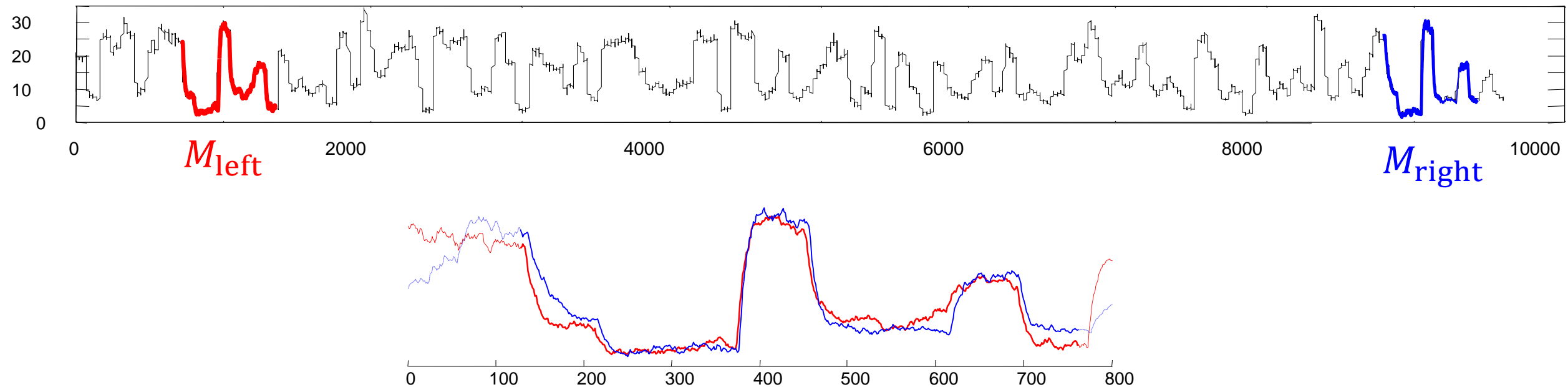
# Поиск аномалий

## Двухгодичное энергопотребление в Китае\*



\* Zhou H. et al. Informer: beyond efficient transformer for long sequence time-series forecasting. AAI 2021: 11106-11115. DOI: [10.1609/aaai.v35i12.17325](https://doi.org/10.1609/aaai.v35i12.17325).

# Поиск шаблонов: мотивы (motifs)

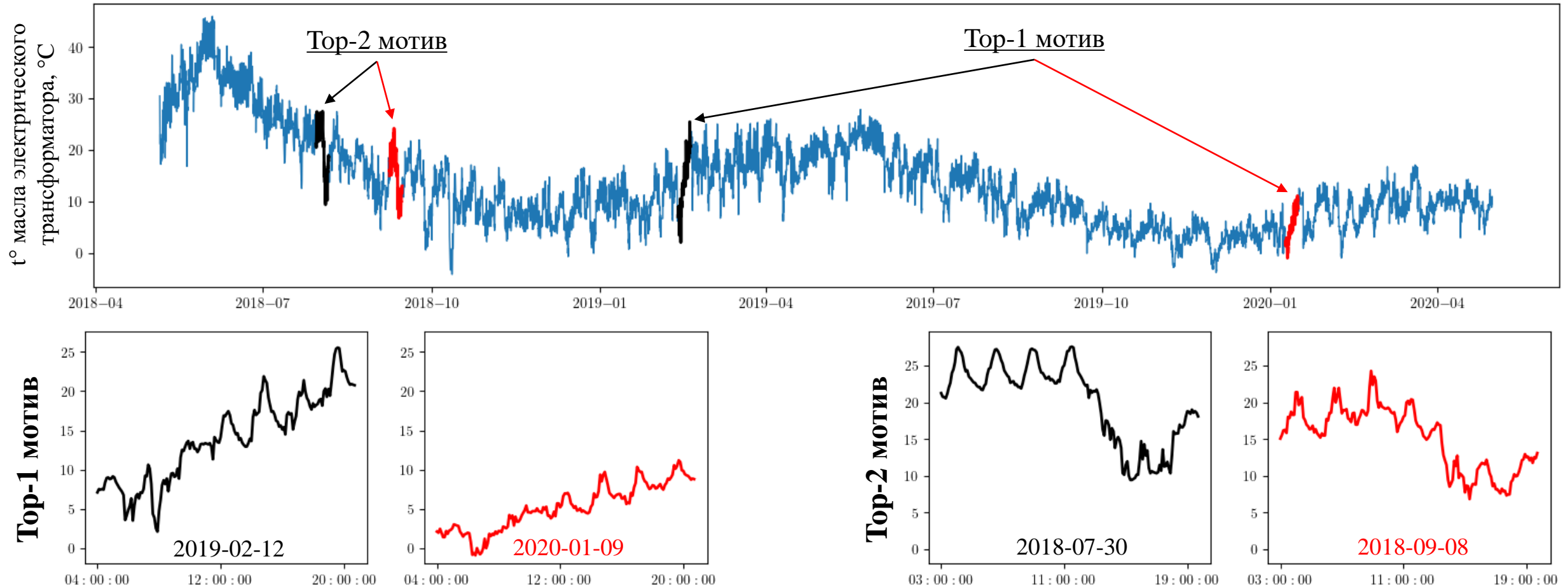


Пара непересекающихся подпоследовательностей ряда равной длины, наиболее похожих друг на друга:

$$\forall C_i, C_j \quad \text{Dist}(M_{left}, M_{right}) \leq \text{Dist}(C_i, C_j)$$

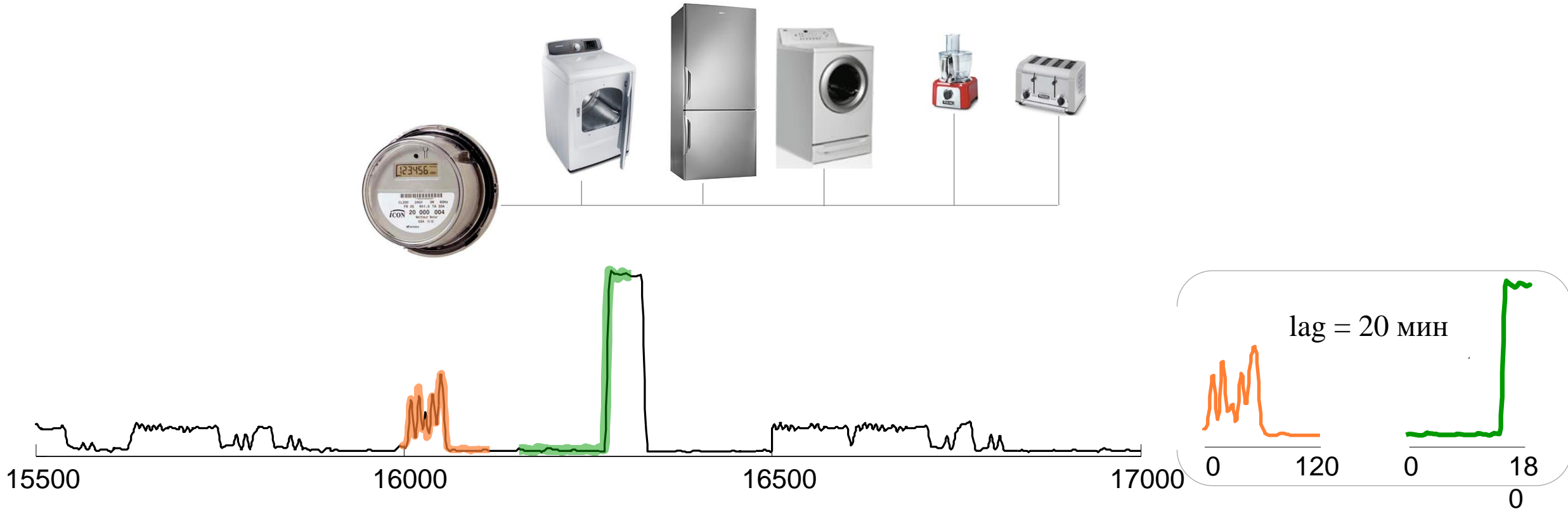
# Поиск шаблонов: мотивы (motifs)

Двухгодичное энергопотребление в Китае\*



\*Zhou H. *et al.* Informer: beyond efficient transformer for long sequence time-series forecasting. AAAI 2021: 11106-11115. DOI: [10.1609/aaai.v35i12.17325](https://doi.org/10.1609/aaai.v35i12.17325).

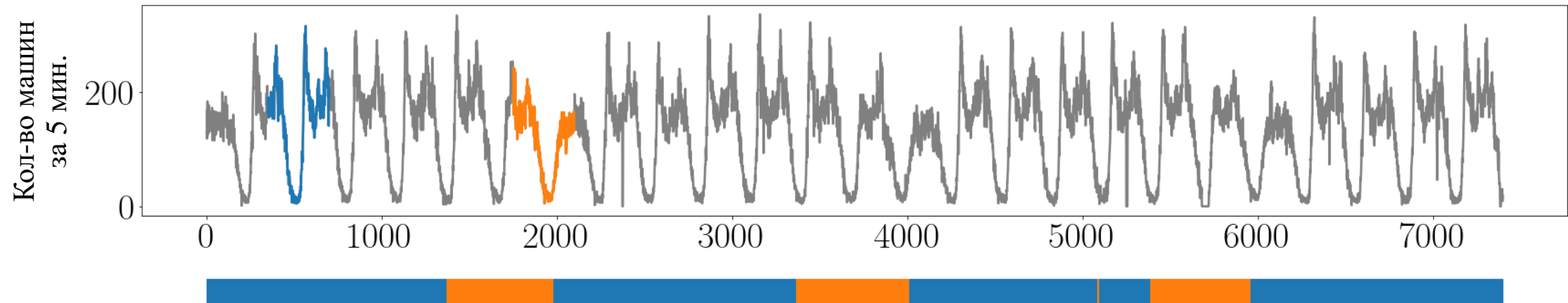
# Поиск шаблонов: ассоциативные правила (association rules)



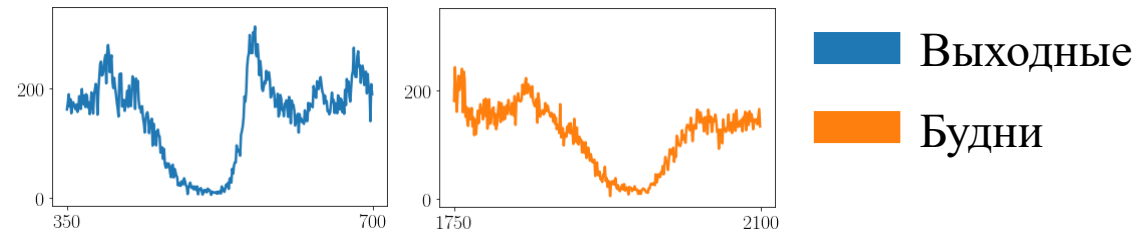
**IF** *работает стиральная машина*  
**THEN** не более чем через 20 мин. *работает сушильная машина*

# Поиск шаблонов: снippets (snippets)

Месячный автотрафик в Мюнхене\*



Сниппеты

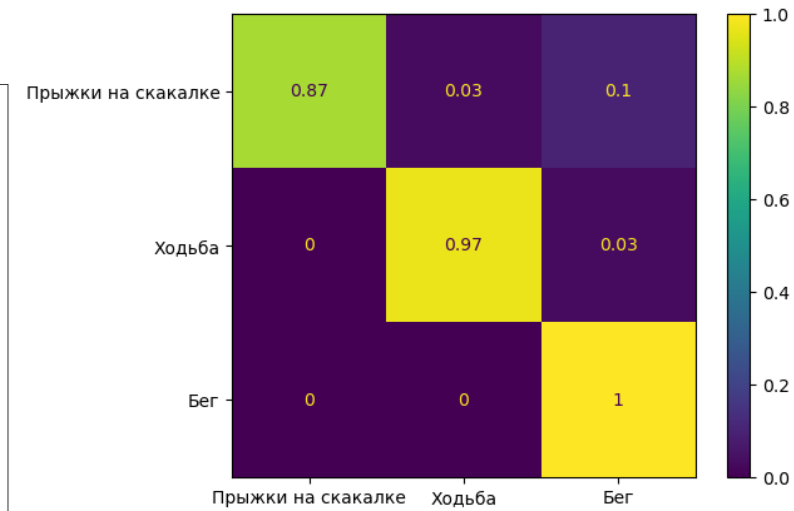
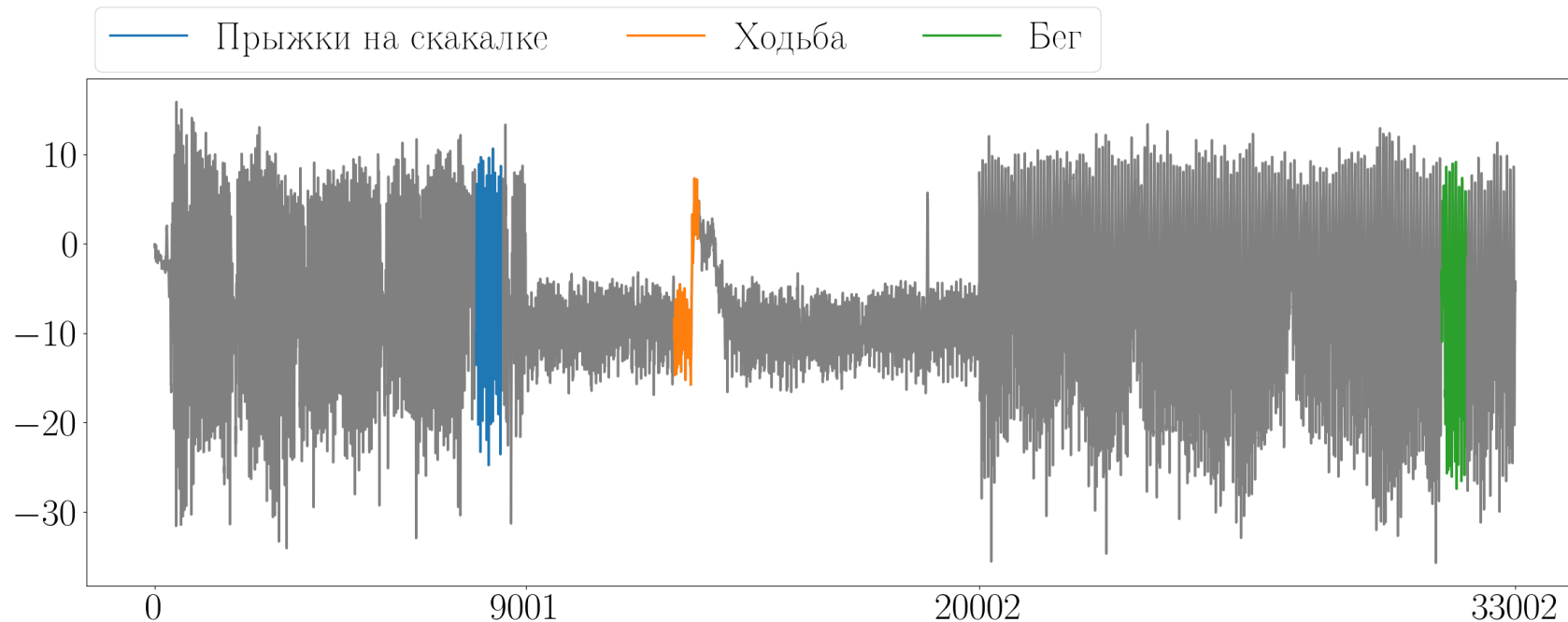


Множество подпоследовательностей ряда, выражающих типичные активности субъекта

\* Public (anonymized) road traffic prediction datasets from Huawei Munich Research Center. URL: <https://zenodo.org/record/3653880#.Y0zZi3ZBxPa>

# Поиск шаблонов: снippets

Показания носимого акселерометра



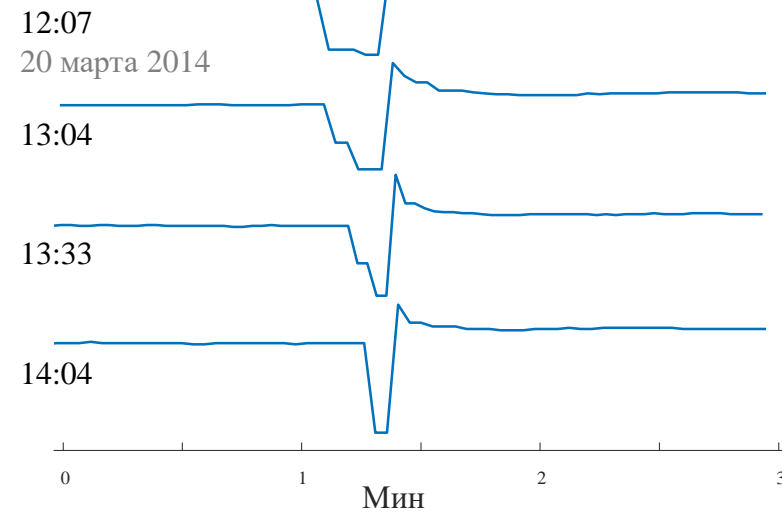
Активность	Precision	Recall	F1
Прыжки	1	0.87	0.93
Ходьба	0.98	0.97	0.97
Бег	0.77	1	0.87

\* Reiss A., Stricker D. Introducing a new benchmarked dataset for activity monitoring. ISWC 2012, Newcastle, UK, June 18-22, 2012. 108–109. IEEE (2012). doi: [10.1109/ISWC.2012.13](https://doi.org/10.1109/ISWC.2012.13)

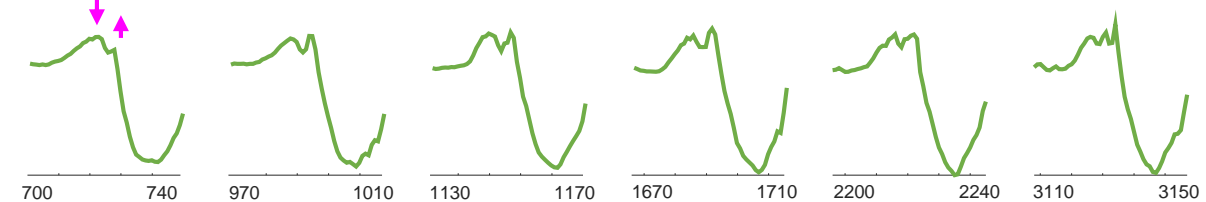
# Поиск шаблонов: цепочки (chains)



## Энергопотребление холодильника



Запись датчика с левой икры спортсмена,  
когда он начал бег трусцой на беговой дорожке

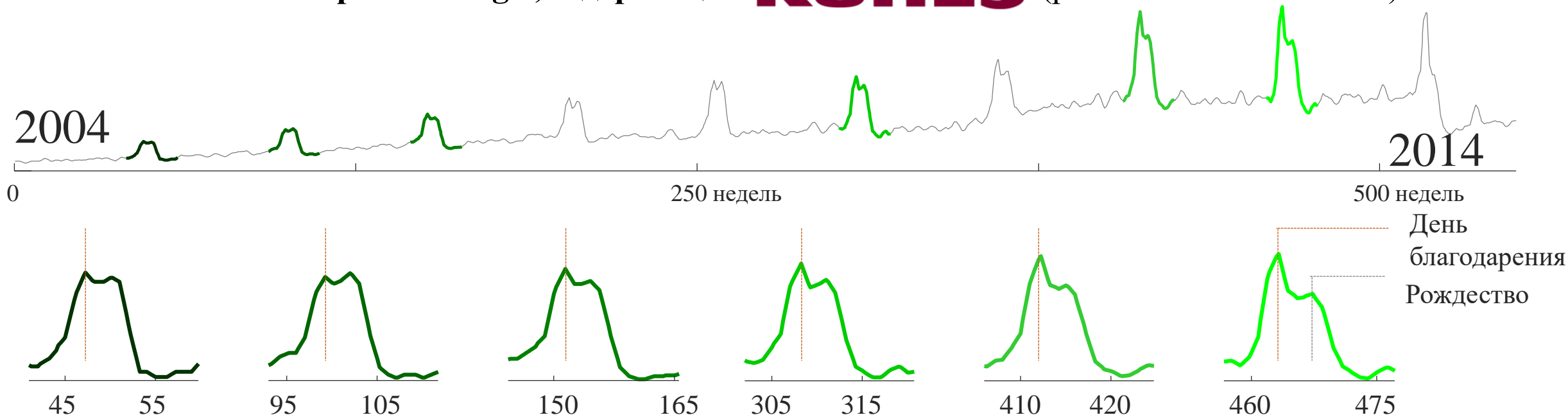


Цепочка подпоследовательностей ряда,  
звенья которой отражают эволюцию некоего процесса



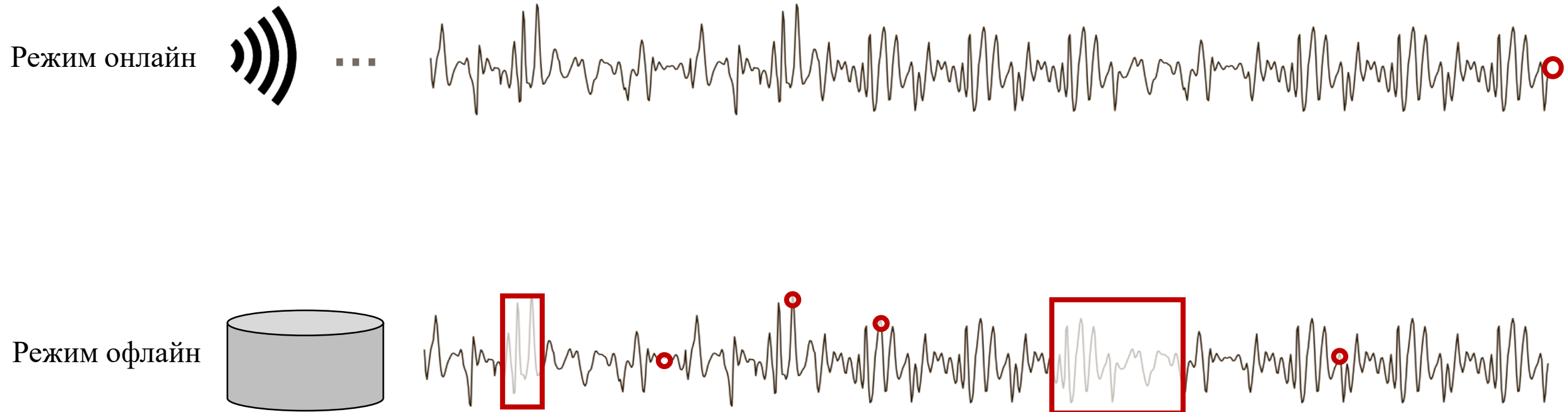
# Поиск шаблонов: цепочки (chains)

Число запросов Google, содержащих **KOHLS** (розничная сеть в США)



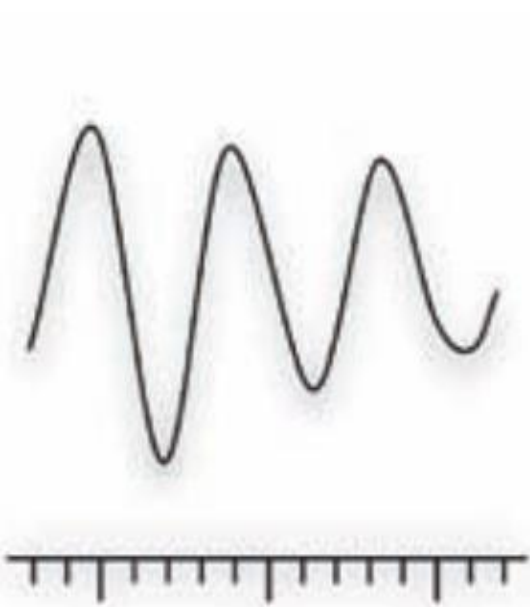
- **Рост важности Киберпонедельника** (понедельник после Дня благодарения): за 10 лет выпуклость меняется от плавной и занимающей большой период между Днём благодарения и Рождеством к резкой и сосредоточенной на Дне благодарения
- Термин введен в пресс-релизе “Киберпонедельник становится одним из крупнейших дней онлайн-покупок в году” 28 ноября 2005 г., дата которого совпадает с первым проблеском острого пика в цепочке

# Восстановление пропущенных значений ряда (imputation/recovery)

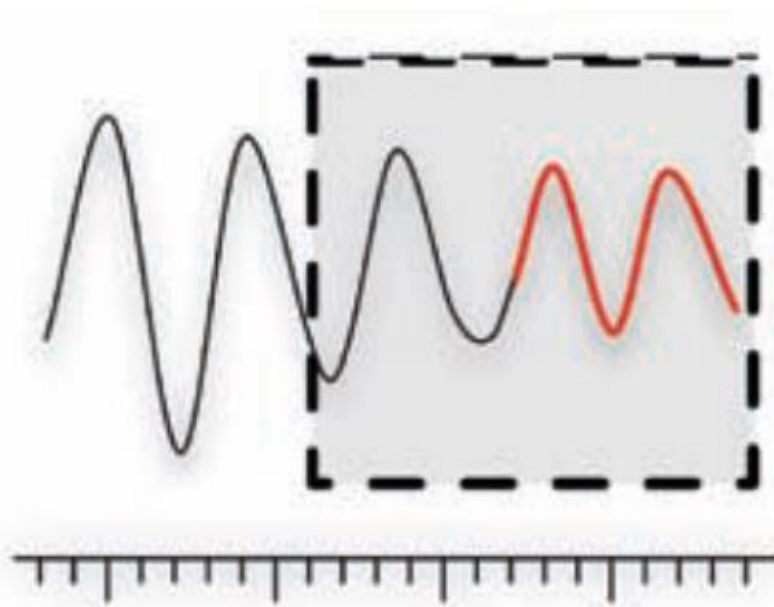


## Синтез отсутствующих значений ряда

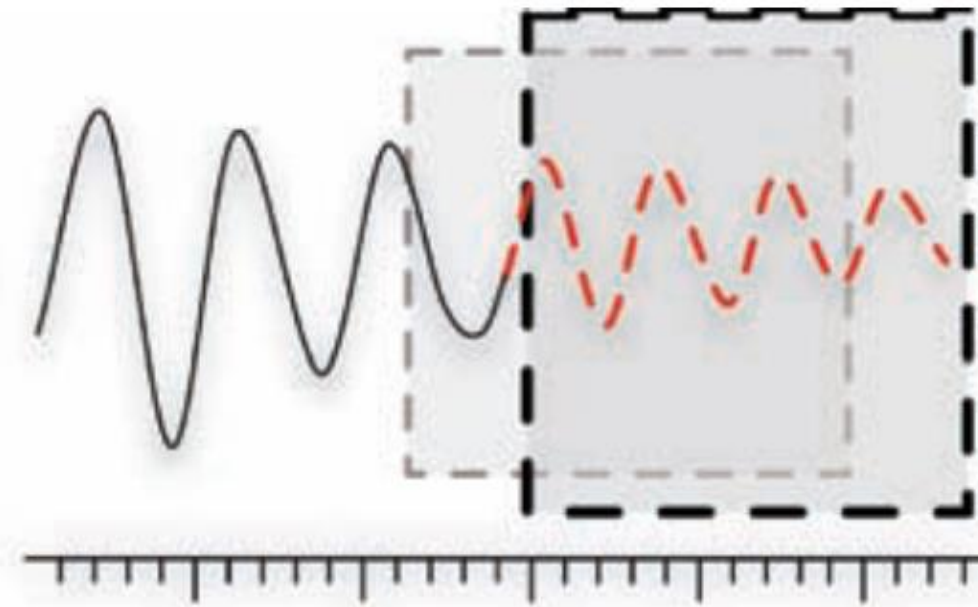
# Прогнозирование временного ряда (forecast)



Исходный ряд  
(периодическая структура,  
поддающаяся прогнозу)



Прогноз точек данных  
в пределах  
окна прогнозирования

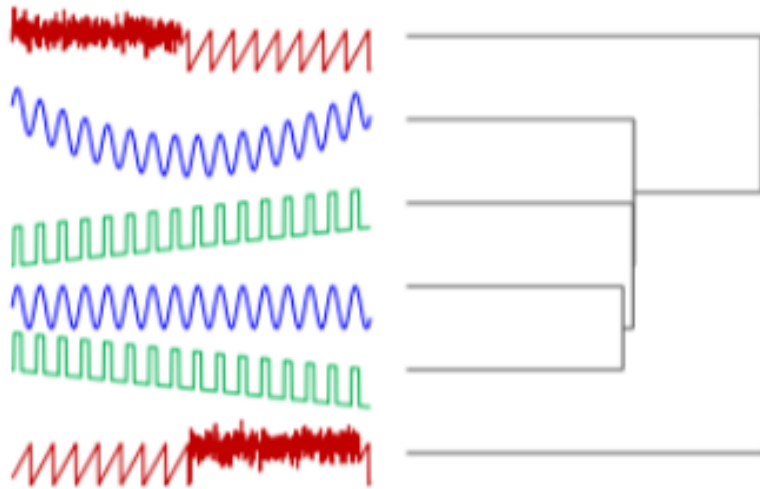


Долгосрочный прогноз:  
использование более ранних прогнозных  
значений в качестве входных данных прогноза

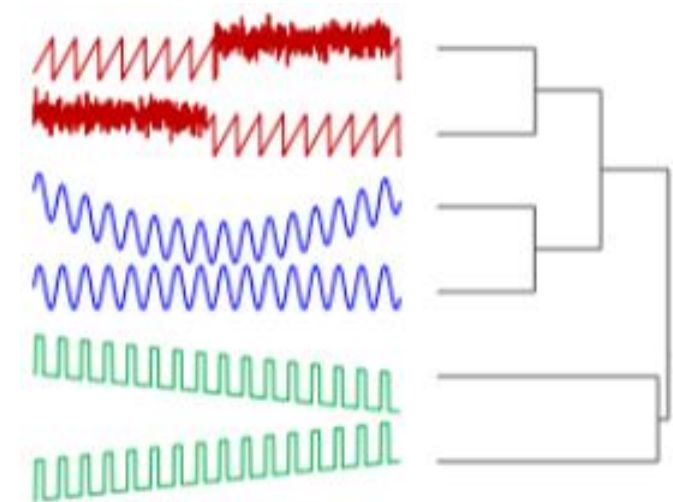
## Синтез будущих значений ряда

# Классификация и кластеризация временных рядов

- При небольшой длине рядов можно использовать стандартные алгоритмы машинного обучения и адекватные функции для вычисления схожести (например, Dynamic Time Warping)
- Для длинных временных рядов нужны специализированные функции для вычисления схожести

**DTW****PRCIS**

(Pattern Representation Comparison in Series)\*



\* Der A. *et al.* Matrix Profile XXVII: A Novel Distance Measure for Comparing Long Time Series. ICKG 2022. P. 40-47. <https://doi.org/10.1109/ICKG55886.2022.00013>

## **Классификация подпоследовательностей ряда возможна, но их кластеризация БЕССМЫСЛЕННА\***

- Подпоследовательности одного временного ряда обычно сильно коррелируют между собой, что делает их неинформативными для кластеризации
- Подпоследовательности разных временных рядов обычно имеют различные характеристики и паттерны, что позволяет выделить более информативные признаки и получить осмысленный результат кластеризации
- Пример: мониторинг температуры в помещении
  - Если температура в помещении измеряется каждые 5 мин., то подпоследовательности измерений за последний час будут сильно коррелировать между собой, так как температура в помещении обычно меняется медленно и плавно
  - Кластеризация подпоследовательностей измерений за последний час не будет иметь смысла, так как они будут очень похожи друг на друга и не будут содержать достаточно информации для кластеризации
  - Для кластеризации нужно использовать подпоследовательности измерений за разные периоды времени (за последние сутки, неделю, месяц и др.)

\* Keogh E., Lin J. Clustering of time-series subsequences is meaningless: implications for previous and future research. Knowl. Inf. Syst. 8(2). 2005. 154-177.  
DOI: [10.1007/s10115-004-0172-7](https://doi.org/10.1007/s10115-004-0172-7)

# Содержание

- Понятие временного ряда
- Временные ряды в различных предметных областях
- Основные задачи анализа временных рядов
- **Определения и нотация**

# (Одномерный) временной ряд (univariate time series)

- Конечная последовательность хронологически упорядоченных вещественных значений

$$T = (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}$$

$$n - \text{длина ряда, } |T| = n$$

- Точки ряда ассоциированы с временными метками, сделанными через **равные промежутки** (частота измерений фиксирована)
- Значения временных меток могут не подвергаться обработке или отсутствовать в исходных данных

## Подпоследовательность (subsequence)

- Непрерывный промежуток временного ряда, имеющий заданную длину

$$T_{i,m} = (t_i, \dots, t_{i+m-1}), \quad 3 \leq m \ll n, \quad 1 \leq i \leq n - m + 1$$

- Множество всех подпоследовательностей ряда, имеющих заданную длину

$$S_T^m, \quad |S_T^m| = n - m + 1$$



# Почему подпоследовательности важны

- Ряд анализируется как множество подпоследовательностей заданной длины
- Длина подпоследовательности – параметр, задаваемый экспертом
  - $m \geq 3$ : подпоследовательности в 1-2 точки не имеют смысла
  - $m \ll n$ : подпоследовательности на порядки короче, чем ряд
- Длина подпоследовательности существенным (непредсказуемым) образом влияет на результат анализа
  - Если  $T_{i,m}$  – аномалия, то не факт, что  $T_{i,m-1}$  и  $T_{i,m+1}$  тоже аномалии
  - Если  $\{T_{l,m}, T_{r,m}\}$  – мотив, то не факт, что  $\{T_{l,2m}, T_{r,2m}\}$  тоже мотив

## Потоковый временной ряд (streaming time series)

- Бесконечная упорядоченная последовательность вещественных значений, которые поступают непрерывно одно за другим в режиме реального времени

$$T = (t_1, \dots, t_n, \dots), \quad t_i \in \mathbb{R}$$

- Режим реального времени предполагает конечный период времени обработки данных, заданный для *конкретной предметной области*: **реальное время  $\neq$  «очень быстро»**

# Многомерный временной ряд (multivariate time series)

- Состоит из логически связанных одномерных временных рядов (измерений), *синхронизированных по времени*

$$\mathbf{T} = [T^{(1)}, \dots, T^{(d)}]^T, \quad d > 1, \quad T^{(i)} = (t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}), \quad t_k^{(i)} \in \mathbb{R}$$

- Многомерная точка

$$\mathbf{t}_i = [t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(d)}]^T$$

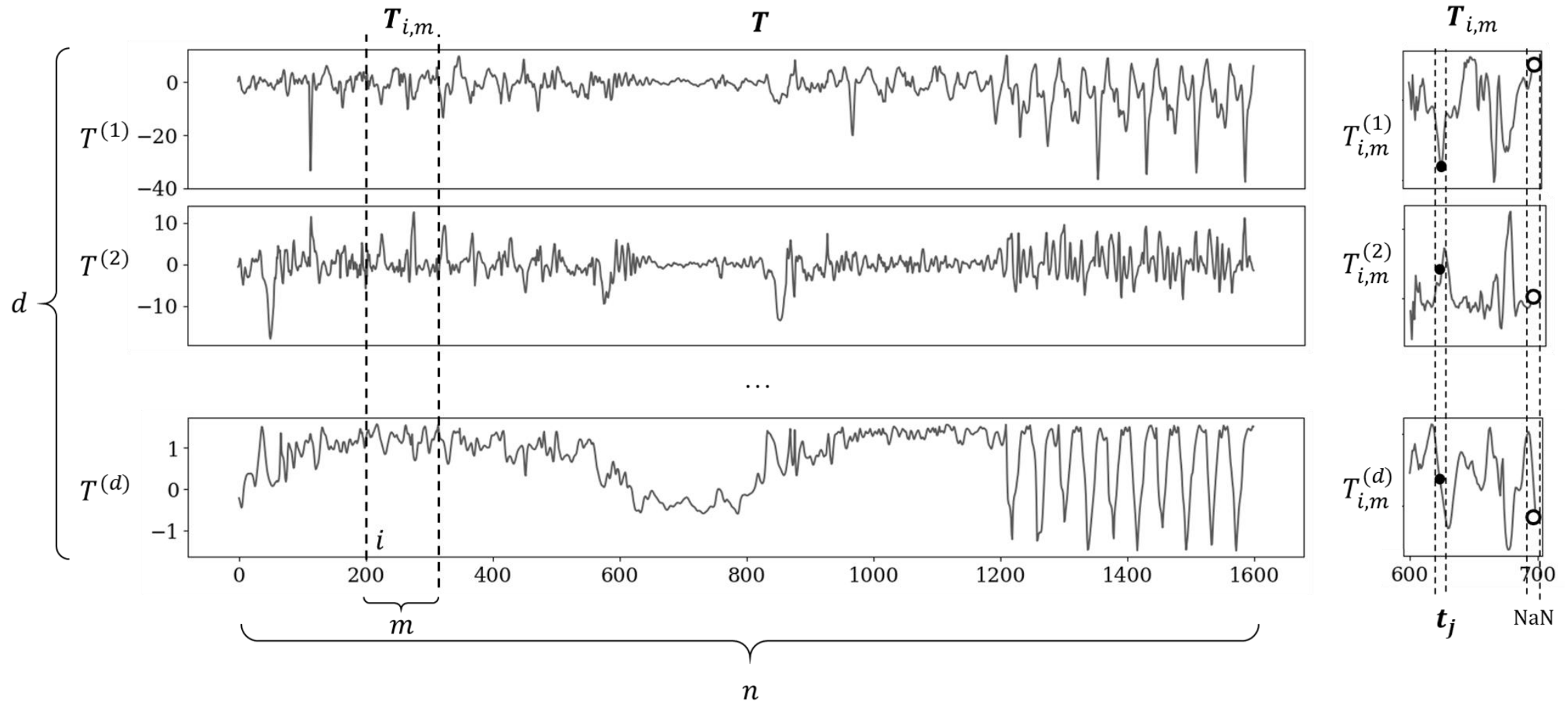
- Многомерная подпоследовательность

$$\mathbf{T}_{i,m} = [T_{i,m}^{(1)}, \dots, T_{i,m}^{(d)}]^T$$

- Множество подпоследовательностей

$$S_T^m = \bigcup_{k=1}^d S_{T^{(k)}}^m, \quad |S_T^m| = d(n - m + 1)$$

# Многомерный временной ряд



# Литература

1. Esling P., Agon C. Time-series Data Mining. ACM Comput. Surv. 2012. Vol. 45, No. 1. P. 12:1–12:34.  
<https://doi.org/10.1145/2379776.2379788>.
2. Fu T.C. A review on time series data mining. Eng. Appl. of AI. 2011. Vol. 24, No. 1. P. 164–181.  
<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2010.09.007>.