АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Сложность – это сумма простых трудностей.
Г. Александров

Суперкомпьютеры и их применение

Содержание

2

- Модель вычислений "операции-операнды"
- Схема параллельного выполнения алгоритма
- Оценки времени выполнения параллельного алгоритма

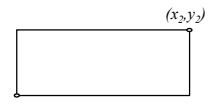
Модель "операции-операнды"

3

- Допущения
  - время выполнения любых вычислительных операций является одинаковым и равно 1
  - передача данных между вычислительными устройствами выполняется мгновенно.
- Алгоритм представляется в виде ациклического ориентированного графа *G(V,R)*
  - Вершины $V=\{1,\ldots,|V|\}$ – операции алгоритма.
  - Дуги $R=\{r(i,j)\}$ – информационные связи между операциями (операция *j* использует результат операции *i*).
  - Вершины без входных дуг – операции ввода, вершины без выходных дуг – операции вывода.
  - $\overline{V}$ – множество вершин графа без вершин ввода.
  - *d(G)* –диаметр графа, длина максимального пути.

Граф "операции-операнды"

4



$S=(x_2-x_1)(y_2-y_1)=$
$x_2y_2-x_2y_1-x_1y_2+x_1y_1$

Если между некоторыми вершинами графа не существует соединяющий их путь, то соответствующие операции могут быть выполнены параллельно.

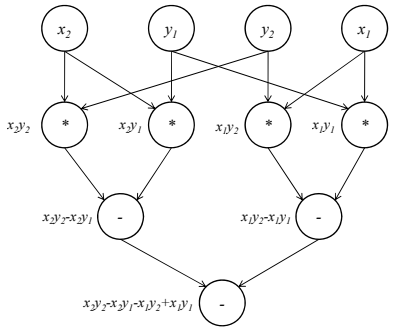


Схема параллельного выполнения

5

- Расписание параллельного выполнения алгоритма – множество $H_p=\{(i,P_i,t_i)$, где $i \in V\}$
  - p – количество процессоров для выполнения алгоритма
  - i – номер операции
  - P_i – номер процессора
  - t_i – время начала i-й операции
- Необходимые условия
  - Один и тот же процессор не должен назначаться разным операциям в один и тот же момент времени
    $\forall i,j \in V : t_i = t_j \Rightarrow P_i \neq P_j$
  - к назначаемому моменту выполнения операции все необходимые ей данные должны быть вычислены
    $\forall (i,j) \in R \Rightarrow t_j \geq t_i + 1$

Время выполнения последовательного алгоритма

6

- Время выполнения последовательного алгоритма для заданной вычислительной схемы

  $T_1(G) = \left|\overline{V}\right|$
- Время выполнения последовательного алгоритма

  $T_1 = \min_G T_1(G)$
- Время последовательного решения задачи

  $T_1^* = \min T_1$

Время выполнения параллельного алгоритма

7

- Модель параллельного алгоритма $A_p(G, H_p)$
- Время выполнения параллельного алгоритма с заданным расписанием $T_p(G, H_p) = \max_{i \in V}(t_i + 1)$
- Время выполнения параллельного алгоритма с оптимальным расписанием $T_p(G) = \min_{H_p} T_p(G, H_p)$

Время выполнения параллельного алгоритма

8

- Минимально возможное время решения задачи при заданном количестве процессоров (определение *наилучшей вычислительной схемы*) $T_p = \min_G T_p(G)$
- Оценка наиболее быстрого исполнения алгоритма (при использовании *паракомпьютера* – гипотетической системы с неограниченным числом процессоров) $T_\infty = \min_{p \geq 1} T_p$

Оценки времени выполнения параллельного алгоритма

9

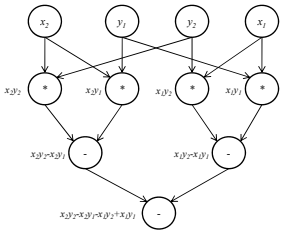
- Каково минимальное время выполнения?
- Каково максимальное время выполнения?
- Как изменяется время выполнения при уменьшении количества процессоров?
- Сколько нужно процессоров, чтобы достичь минимального времени?

Теорема 1

10

- Минимально возможное время выполнения параллельного алгоритма определяется длиной максимального пути вычислительной схемы алгоритма:

$$T_\infty(G) = d(G)$$



Теорема 2

11

- Пусть
  - для некоторой вершины вывода в вычислительной схеме алгоритма существует путь из каждой вершины ввода
  - входная степень вершин схемы (количество входящих дуг) не превышает 2.
- Тогда минимально возможное время выполнения параллельного алгоритма ограничено снизу значением $log_2 n$, где n – количество вершин ввода в схеме алгоритма.

$$T_p = \min_G T_p(G) \geq T_\infty(G) = \log_2 n$$

Теорема 3

12

- При уменьшении количества используемых процессоров время выполнения алгоритма увеличивается пропорционально величине уменьшения количества процессоров

$$\forall q = cp, \quad 0 < c < 1 \Rightarrow T_p \leq cT_q$$

Теорема 4

13

- Для любого количества используемых процессоров справедлива следующая верхняя оценка для времени выполнения параллельного алгоритма

$$\forall p \qquad T_p < T_\infty + \frac{T_1}{p}$$

Теорема 5

14

- Время выполнения алгоритма, сопоставимое с минимально возможным временем T_∞, достигается при количестве процессоров порядка $\frac{T_1}{T_\infty}$, т.е.:

$$p \geq \frac{T_1}{T_\infty} \Rightarrow T_p \leq 2T_\infty$$

- При меньшем количестве процессоров время выполнения алгоритма не может превышать более, чем в 2 раза, наилучшее время вычислений при имеющемся числе процессоров, т.е.

$$p < \frac{T_1}{T_\infty} \Rightarrow \frac{T_1}{p} \leq T_p \leq 2\frac{T_1}{p}$$

Выбор параллельного алгоритма

15

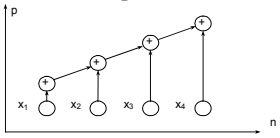
- Граф вычислительной схемы алгоритма должен иметь минимально возможный диаметр (Теорема 1).
- Целесообразное количество процессоров для параллельного выполнения определяется величиной $\frac{T_1}{T_\infty}$ (Теорема 5).
- Время выполнения параллельного алгоритма ограничивается сверху величинами $T_\infty + \frac{T_1}{p}$ (терема 4) и $2\frac{T_1}{p}$ (Теорема 5).

Пример: вычисление суммы

16

- Пусть требуется вычислить сумму набора значений
  $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Последовательный алгоритм

$G_1 = (V_1, R_1)$

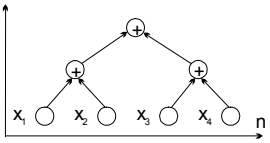


допускает только строго последовательное исполнение и не может быть распараллелен.

Каскадная схема суммирования

17

$G_2 = (V_2, R_2)$



- Количество итераций
  $k = \log_2 n$
- Общее количество операций суммирования
  - Последовательное исполнение
    $K_{посл} = n/2 + n/4 + ... + 1 = n - 1$
  - Параллельное исполнение
    $K_{пар} = \log_2 n$

Оценка эффективности каскадной схемы

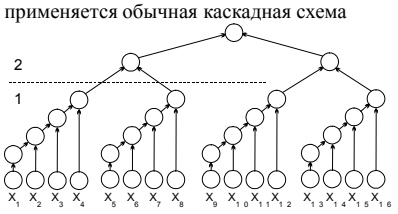
18

- Ускорение
  $S_p = T_1 / T_p = (n-1) / \log_2 n$
- Эффективность
  $E_p = T_1 / pT_p = (n-1) / (p \log_2 n) = (n-1) / ((n/2) \log_2 n)$
- Необходимое количество процессоров
  $p=n/2$
- Наблюдения
  - Время параллельного выполнения каскадной схемы совпадает с оценкой для паракомпьютера (Теорема 2).
  - Эффективность использования процессоров уменьшается при увеличении количества суммируемых значений:
    $\lim_{n \to \infty} E_p = 0$

Улучшение каскадной схемы

19

- Все суммируемые значения подразделяются на $n/\log_2 n$ групп, в каждой из которых содержится $\log_2 n$ элементов; для каждой группы вычисляется сумма значений при помощи последовательного алгоритма суммирования;
- На втором этапе для полученных $n/\log_2 n$ сумм отдельных групп применяется обычная каскадная схема



Оценка эффективности улучшенной каскадной схемы

20

- Для выполнения первого этапа требуется $\log_2 n$ выполнений параллельных операций при использовании $p=n/\log_2 n$ процессоров.
- Для выполнения второго этапа необходимо $\log_2(n/\log_2 n)\le\log_2 n$ параллельных операций для $p=(n/\log_2 n)/2$ процессоров.
- Время выполнения параллельного алгоритма составляет $T_p=2\log_2 n$ для $p=(n/\log_2 n)$ процессоров.

Оценка эффективности улучшенной каскадной схемы

21

- Ускорение
  $S_p = T_1 / T_p = (n-1)/2\log_2 n$
- Эффективность
  $E_p = T_1 / pT_p = (n-1)/(2(n/\log_2 n)\log_2 n) = (n-1)/2n$
- Наблюдения
  - По сравнению с обычной каскадной схемой ускорение уменьшилось в 2 раза.
  - Для эффективности нового метода суммирования можно получить асимптотически ненулевую оценку снизу
    $E_p = (n-1)/2n \ge 0,25 \qquad \lim_{n\to\infty} E_p = 0,5$
  - Каскадный алгоритм является стоимостно-оптимальным (стоимость вычислений пропорциональна времени выполнения последовательного алгоритма)
    $C_p = pT_p = (n/\log_2 n)(2\log_2 n) = 2n$

Оценка эффективности улучшенной каскадной схемы

22

- Вычисление суммы на скалярном компьютере может быть получено при помощи обычного последовательного алгоритма суммирования при том же количестве операций: $T_1=n$.
- При параллельном исполнении применение каскадной схемы в явном виде не приводит к желаемым результатам.
- Достижение эффективного распараллеливания требует привлечения новых подходов (возможно, не имеющих аналогов в последовательном программировании).

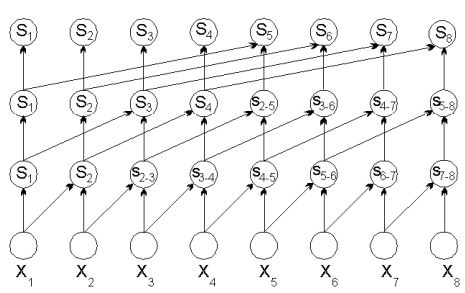
Эффективный параллельный алгоритм

23

- Алгоритм, обеспечивающий получение результатов за $\log_2 n$ параллельных операций:
  - Перед началом вычислений создается копия S вектора суммируемых значений ($S=x$),
  - Далее на каждой итерации суммирования i ($1 \le i \le \log_2 n$) формируется вспомогательный вектор Q путем сдвига вправо вектора S на 2^{i-1} позиций. Освобождающиеся при сдвиге позиции слева устанавливаются в нулевые значения.
  - Итерация алгоритма завершается параллельной операцией суммирования векторов S и Q.

Эффективный параллельный алгоритм

24



Оценка эффективности

25

- Общее количество выполняемых скалярных операций

  $K_{посл} = n \log_2 n$
- Необходимое количество процессоров (определяется количеством суммируемых значений)

  $p=n$
- Ускорение

  $S_p = T_1 / T_p = n / \log_2 n$
- Эффективность

  $E_p = T_1 / pT_p = n / (p \log_2 n) = n / n \log_2 n = 1 / \log_2 n$

Заключение

26

- Модель вычислений "операции-операнды"
- Схема параллельного выполнения алгоритма
- Оценки времени выполнения параллельного алгоритма